

INSTITUTO MILITAR DE ENGENHARIA

**ABORDAGEM DO PROBLEMA DE CARGAS MÓVEIS ATRAVÉS DE
UMA TÉCNICA MULTIDISCIPLINAR DE MODELAGEM**

POR

WALLACE MOREIRA BESSA

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA
COMO REQUISITO PARCIAL
PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE
MESTRE EM CIÊNCIAS
EM ENGENHARIA MECÂNICA

Assinatura do Orientador da Dissertação

FERNANDO RIBEIRO DA SILVA – D.Sc.

Rio de Janeiro – RJ

Março 2000

Aos meus pais Luiz Fernando e Dayse,
aos meus irmãos Danielle e Guilherme,
à minha namorada Raquel, por estarem
sempre ao meu lado, dando apoio e carinho.

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Fernando Ribeiro da Silva, orientador e amigo, pelos conselhos e sugestões, que foram de extrema importância para a realização deste trabalho.

Ao Prof. Marcelo Savi e ao Prof. Albino Leiroz, pelo apoio e atenção dados durante toda a execução deste trabalho.

Aos meus companheiros do curso de mestrado, Alberto Paiva, Luiz Fernando Franca, Jorge Audrin, André Louzada, Iran Aragão e Rogério Lins, que estiveram sempre dispostos a ajudar no que fosse preciso.

Ao Eng^o Marcus França e à toda a equipe da MTL Engenharia pelo incentivo e motivação.

Ao CNPq pelo suporte financeiro.

RESUMO

O comportamento dinâmico de uma estrutura, submetida a ação de um carregamento móvel, tem sido abordado por diversas áreas da engenharia. Apesar da crescente complexidade que vem se atribuindo a estrutura, pouco tem se acrescentado no que diz respeito ao carregamento. De uma maneira geral os trabalhos disponíveis apresentam modelos onde a carga é simples e constante.

Neste trabalho, procura-se analisar interação de uma estrutura, representada por uma viga ou por uma placa, com um carregamento móvel oriundo de um subsistema que possua uma dinâmica própria. O efeito de parâmetros importantes do subsistema, como por exemplo, sua velocidade, sua trajetória e suas características mecânicas, são levados em consideração na análise da resposta da estrutura. São apresentados resultados de simulação para a validação do procedimento, com o intuito de destacar a importância de um modelo que considere o comportamento global do sistema.

ABSTRACT

In several fields of engineering it has become of increasing interest to study the dynamic behavior of structures under moving loads. Simplifications have commonly been introduced by assuming the moving load as a moving force.

The present contribution presents a study of the interaction between a structure, represented by a beam or a plate, and a moving load originated from a mechanical subsystem. The effect of some important parameters of the mechanical subsystem in the structural response, is taken into account. Some results is shown to emphasize the significance of a model which considers the global behavior of the entire system

SUMÁRIO

RESUMO	iii
ABSTRACT	iv
LISTA DE ILUSTRAÇÕES	vii
LISTA DE TABELAS	x
LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS	xi
1 – INTRODUÇÃO	01
1.1 – POSICIONAMENTO	01
1.2 – DESENVOLVIMENTO	03
2 – MODELAGEM DO PROBLEMA DE CARGAS MÓVEIS ATRAVÉS DA TÉCNICA DOS GRAFOS DE LIGAÇÃO UTILIZANDO AS FREQUÊNCIAS NATURAIS E AS AUTOFUNÇÕES DA ESTRUTURA	05
2.1 – INTRODUÇÃO	05
2.2 – CARGAS MÓVEIS SOBRE VIGAS	06
2.3 – CARGAS MÓVEIS SOBRE PLACAS	12
3 – ANÁLISE DINÂMICA DE CARGAS MÓVEIS EM VIGAS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS REPRESENTADOS EM GRAFOS DE LIGAÇÃO	20
3.1 – INTRODUÇÃO	20
3.2 – O MODELO ESTRUTURAL	21
3.3 – VIGA SUBMETIDA A CARGA MÓVEL CONSTANTE	27
3.4 – VIGA SUBMETIDA A OSCILADOR MÓVEL	31
4 - ANÁLISE DINÂMICA DE CARGAS MÓVEIS EM PLACAS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS REPRESENTADOS EM GRAFOS DE LIGAÇÃO	38
4.1 – INTRODUÇÃO	38
4.2 – O MODELO ESTRUTURAL	39
4.3 – PLACA SUBMETIDA A CARGA MÓVEL CONSTANTE	46
4.4 – PLACA SUBMETIDA A OSCILADOR MÓVEL	49
5 – APLICAÇÕES DO PROBLEMA DE CARGAS MÓVEIS – INTERAÇÃO DINÂMICA ENTRE VEÍCULO E ESTRUTURA	55
5.1 – INTRODUÇÃO	55

5.2 – INTERAÇÃO TREM - FERROVIA	55
5.3 – INTERAÇÃO CARRO - PONTE	59
6 – CONCLUSÕES E SUGESTÕES	66
APÊNDICE A – GRAFOS DE LIGAÇÃO	69
APÊNDICE B – CÓDIGO COMPUTACIONAL	76
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	79

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

FIGURA 2.1:	Viga bi-apoiada submetida a um oscilador móvel	6
FIGURA 2.2:	Grafo de ligação de uma estrutura que interage com um subsistema qualquer	7
FIGURA 2.3:	Grafo de ligação de uma viga submetida a uma carga simples	9
FIGURA 2.4:	Deslocamento vertical do centro de uma viga	11
FIGURA 2.5:	Placa simplesmente apoiada submetida a um oscilador móvel	12
FIGURA 2.6:	Modos de vibrar da placa	13
FIGURA 2.7:	Grafo de ligação de uma placa que interage com um oscilador	14
FIGURA 2.8:	Configuração deformada do sistema em instantes diferentes	17
FIGURA 2.9:	Vista lateral do sistema em: (a) $t=2,05$ s; (b) $t=2,10$ s e (c) $t=2,14$ s	17
FIGURA 2.10:	Fluxo de potência entre os subsistemas	18
FIGURA 2.11:	Deslocamento do oscilador para: (a) $v = 3$ m/s; (b) $v = 8,88$ m/s e (c) $v = 20$ m/s	18
FIGURA 2.12:	Fluxo de potência para: (a) $v= 3$ m/s; (b) $v= 8,88$ m/s e (c) $v= 20$ m/s	19
FIGURA 3.1:	Grafo multiligação representativo do subsistema estrutural	21
FIGURA 3.2:	Graus de liberdade de um elemento de viga	22
FIGURA 3.3:	Viga bi-apoiada submetida a uma carga aplicada subitamente	24
FIGURA 3.4:	Grafo multiligação de uma estrutura com apenas uma fonte de esforço	24
FIGURA 3.5:	Deslocamento transversal do nó central da viga	26
FIGURA 3.6:	Viga bi-apoiada submetida a uma carga móvel	27
FIGURA 3.7:	Grafo de ligação de uma estrutura submetida a uma carga móvel	28
FIGURA 3.8:	Deslocamento vertical do centro de uma viga em função da posição da carga	30
FIGURA 3.9:	Fator dinâmico de amplificação para diferentes velocidades do carregamento	31
FIGURA 3.10:	Viga bi-apoiada submetida a um oscilador móvel	32
FIGURA 3.11:	Grafo de ligação de uma estrutura que interage com um oscilador móvel	32
FIGURA 3.12:	Deslocamento vertical do centro da viga em função da posição do	

	oscilador	34
FIGURA 3.13:	Fator dinâmico de amplificação	35
FIGURA 3.14:	Deslocamento do centro da viga para: (a) $T/\tau = 0,5$ e (b) $T/\tau = 1,5$	36
FIGURA 3.15:	Deslocamento do oscilador para: (a) $T/\tau = 0,5$ e (b) $T/\tau = 1,5$	36
FIGURA 3.16:	Deslocamento do centro da viga para: (a) $T/\tau = 0,5$ e (b) $T/\tau = 1,5$	37
FIGURA 4.1:	Elemento de placa	39
FIGURA 4.2:	Polinômio de doze termos selecionado a partir do triângulo de Pascal	40
FIGURA 4.3:	Elemento padrão	41
FIGURA 4.4:	Placa simplesmente apoiada submetida a uma carga aplicada subitamente	43
FIGURA 4.5:	Grafo multiligação de uma estrutura com apenas uma fonte de esforço	44
FIGURA 4.6:	Deslocamento transversal do nó central da placa	45
FIGURA 4.7:	Placa simplesmente apoiada submetida a uma carga móvel	46
FIGURA 4.8:	Grafo de ligação de uma estrutura submetida a uma carga móvel	47
FIGURA 4.9:	Deslocamento vertical do centro da placa em função da posição da carga	48
FIGURA 4.10:	Placa simplesmente apoiada submetida a um oscilador móvel	49
FIGURA 4.11:	Grafo de ligação de estrutura que interage com um oscilador móvel	50
FIGURA 4.12:	Deslocamento vertical do centro da placa em função da posição do oscilador	51
FIGURA 4.13:	Fator dinâmico de amplificação para diferentes velocidades do carregamento	52
FIGURA 4.14:	Deslocamento vertical do centro da placa em função da posição do oscilador para: (a) $T/t = 0,5$ e (b) $T/t = 1,5$	53
FIGURA 4.15:	Configuração deformada do sistema em instantes diferentes	54
FIGURA 5.1:	Trem movendo-se sobre uma ferrovia	56
FIGURA 5.2:	Modelo físico do sistema	56
FIGURA 5.3:	Grafo de ligação de estrutura que interage com um oscilador móvel	57
FIGURA 5.4:	Deslocamento vertical: (a) do trilho em $x = L/2$ e (b) do vagão	58
FIGURA 5.5:	Modelo físico dos subsistemas: (a) estrutura e (b) veículo	59
FIGURA 5.6:	Grafo multiligação de uma estrutura que interage com um veículo	60

FIGURA 5.7:	Trajetória do veículo durante a simulação	62
FIGURA 5.8:	Deslocamento vertical da ponte em $x = a/2$ e $y = b/2$	63
FIGURA 5.9:	Velocidades relacionadas ao movimento vertical do veículo (\dot{d}_z)	64
FIGURA 5.10:	Velocidades dos movimentos angulares do veículo: (a) \dot{d}_y e (b) \dot{d}_x	64
FIGURA A.1:	Representação do sentido da potência e da entrada e saída de esforço e fluxo	70
FIGURA A.2:	Representação de uma multiligação	71
FIGURA A.3:	Grafo multiligação de uma estrutura submetida a uma fonte de esforço	74
FIGURA B.1:	Fluxograma	78

LISTA DE TABELAS

TABELA 3.1:	Frequências naturais de uma viga Bernoulli-Euller bi-apoiada	26
TABELA 3.2:	Comparação entre os deslocamentos numérico e analítico	27
TABELA 3.3:	Fator dinâmico de amplificação (F_{din})	29
TABELA 3.4:	Fator dinâmico de amplificação (F_{din})	33
TABELA 4.1:	Funções de interpolação do elemento de placa	42
TABELA 4.2:	Frequências naturais de uma placa simplesmente apoiada	44
TABELA 4.3:	Comparação entre os deslocamentos analítico e numérico	46
TABELA 4.4:	Fator dinâmico de amplificação (F_{din})	48
TABELA 4.5:	Fator dinâmico de amplificação	50
TABELA 5.1:	Propriedades do sistema	63
TABELA A.1:	Domínio físico e variáveis de potência e energia	70
TABELA A.2:	Elementos básicos da técnica dos grafos de ligação	72
TABELA A.3:	Elementos multiligação	73

LISTA DE ABREVIATURAS E SÍMBOLOS

a	Dimensão da placa na direção x
A	Área da seção reta da viga
b	Dimensão da placa na direção y
[B]	Matriz de amortecimento estrutural
[B _S]	Matriz com o amortecimento da suspensão
[B _P]	Matriz com o amortecimento dos Pneus
c	Amortecimento do oscilador
c_f	Amortecimento da fundação elástica
C_n	Elemento capacitivo
d_i	Dimensões do veículo
C	Campo multiporta capacitivo
D_E	Rigidez flexional da placa
E	Módulo de elasticidade
F_{din}	Fator dinâmico de amplificação
F	Carregamento aplicado
G	Módulo de elasticidade transversal
h	Espessura da placa
h_e	Comprimento do elemento de viga
I	Momento de Inércia
I_n	Elemento Inercial
I_x	Inércia do veículo relativa ao deslocamento angular em torno do eixo x
I_y	Inércia do veículo relativa ao deslocamento angular em torno do eixo y
I	Campo multiporta inercial
J	Matriz Jacobiana da transformação
k	Rigidez do oscilador
k_f	Rigidez da fundação elástica
[K]	Matriz de rigidez estrutural
[K _S]	Matriz com a rigidez da suspensão
[K _P]	Matriz com a rigidez dos Pneus
L	Comprimento da viga

m	Massa do oscilador
m_n	Módulo do transformador modulado
M_v	Massa da viga
M_p	Massa da placa
[M]	Matriz de massa estrutural
[M _v]	Matriz com a massa do veículo
[M _R]	Matriz com a massa das rodas
<i>MTF</i>	Transformador modulado
MTF	Multitransformador modulado
[N]	Módulo do multitransformador do veículo
p	quantidade de movimento
p	Vetor quantidade de movimento
P	Fluxo de potência
q	Deslocamento
q	Vetor deslocamento
R_n	Elemento resistivo
R	Campo multiporta resistivo
Se	Fonte de esforço
Sf	Fonte de fluxo
t	Tempo
TF	Multitransformador
u_i^e	Grau de liberdade do elemento
U	Vetor de variáveis de entrada
v	Velocidade do carregamento
w	Deslocamento na direção z
X	Vetor de variáveis de estado
Y	Vetor de variáveis de saída
W	Modo de vibrar da estrutura
W_{est}	Deslocamento estático analítico
W_{din}	Deslocamento dinâmico
a	Constante de amortecimento proporcional
b	Constante de amortecimento proporcional

d_x	Deslocamento angular do veículo em torno do eixo x
d_y	Deslocamento angular do veículo em torno do eixo y
d_z	Deslocamento do veículo em z
h	Coordenada local do elemento na direção y
q_x	Grau de liberdade de rotação em x
q_y	Grau de liberdade de rotação em y
ν	Coefficiente de Poisson
x	Coordenada local do elemento na direção x
x_n	Coefficiente de amortecimento modal
r_v	Massa específica
r_a	Densidade de área
f_i	Função de interpolação de Hermite
$\{\Phi\}$	Módulo do multitransformador
τ	Tempo que um carregamento leva para atravessar a estrutura
T	Período fundamental da estrutura
w	Frequência natural

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

1.1 – POSICIONAMENTO

O comportamento dinâmico de uma estrutura submetida a um carregamento móvel vem sendo investigado desde a construção das primeiras pontes para estradas de ferro no começo do século XIX. O interesse por essa classe de problemas surgiu quando se observou que, em uma determinada estrutura, o deslocamento dinâmico proporcionado por um carregamento móvel era maior do que o deslocamento estático máximo.

Apesar de sua motivação original, o problema de cargas móveis, atualmente, vem sendo abordado por diversas áreas da engenharia. Suas aplicações incluem a análise da interação entre veículo e estrutura (pontes, viadutos e ferrovias) e o estudo do comportamento dinâmico de máquinas operatrizes, fuselagens de aviões, cascos de submarinos e discos rígidos de computador.

Diferentes aspectos do problema em questão foram investigados ao longo das últimas décadas. Timoshenko¹, Biggs² e Warburton³ apresentaram soluções analíticas para a equação diferencial de governo de uma viga Bernoulli-Euler submetida a uma carga móvel simples e constante.

Considerando o efeito do cisalhamento e da inércia rotatória do modelo estrutural, Achembach e Sun⁴ analisaram o comportamento de uma viga de Timoshenko infinita apoiada em uma fundação elástica, quando atravessada por uma carga móvel. Jahanshahi e Monzel⁵ e Adler e Reismann⁶, utilizando a teoria de Mindlin para placas, incorporaram os mesmos efeitos, para o caso de uma placa infinita sob a ação de um carregamento móvel distribuído em linha, perpendicular à sua trajetória. Todos estes trabalhos, entretanto, não consideraram a resposta transiente da estrutura.

Como em muitas outras aplicações da engenharia, o conhecimento da resposta transiente é de grande relevância para que se possa entender o comportamento real de uma estrutura. Ao analisar o regime transiente de vigas e cascas submetidas a carregamentos móveis, Steele⁷ descobriu que a simplificação de se considerar apenas o regime permanente, induzia a conclusões errôneas. Portanto, para o perfeito entendimento deste fenômeno, é preciso que se conheça a resposta dinâmica em toda a estrutura, e a cada instante.

Outra limitação presente em todos os trabalhos supracitados, é que o carregamento adotado é sempre constante. Para a análise da interação entre veículo e estrutura, por exemplo, esta simplificação é perfeitamente aceitável quando o peso do veículo é pequeno se comparado ao da estrutura.

Com o desenvolvimento de novos materiais e o crescimento dos transportes urbanos de massa, pontes e viadutos têm se tornado cada vez mais esbeltos, ao passo que ônibus e trens, por sua vez, tornam-se mais pesados. Devido a esse aumento da relação entre o peso do veículo e o peso da estrutura, para que um modelo represente bem esta interação, a dinâmica veicular precisa ser considerada. Essa necessidade, porém, esbarra na dificuldade de se considerar, em um mesmo modelo, subsistemas de parâmetros distribuídos e concentrados que interajam entre si.

Em 1976, utilizando a técnica dos grafos de ligação, Margolis⁸ apresentou um procedimento para a análise dinâmica de um veículo trafegando sobre uma ponte. Neste trabalho a ponte foi representada através de suas autofunções e frequências naturais, enquanto o veículo foi modelado como corpo rígido apoiado sobre sua suspensão. A dinâmica do sistema completo pôde, então, ser estudada.

Estendendo esta metodologia para a análise de modelos estruturais bidimensionais, Da Silva e Bessa⁹, analisaram a interação entre uma placa e um carregamento oriundo de um subsistema mecânico em movimento.

Entretanto, a modelagem do subsistema estrutural através de suas autofunções, implica que a solução analítica da equação diferencial parcial de governo seja previamente conhecida. Isto traz uma limitação para a modelagem de estruturas com condições de contorno mais complexas.

Com o desenvolvimento e difusão de computadores digitais com maior capacidade de armazenamento e maior velocidade de processamento, tornou-se viável a utilização de ferramentas computacionais e métodos numéricos mais elaborados. O método dos elementos finitos, particularmente, tem se mostrado eficaz na representação de modelos estruturais com elevado grau de complexidade.

Vários autores utilizaram esta metodologia para estudar o problema de cargas móveis. Lin e Trethewey¹⁰ analisaram o comportamento de uma viga Bernoulli-Euler interagindo com sistemas dinâmicos de um e dois graus liberdade. Considerando apenas uma carga simples, Thambiratnam e Zhuge¹¹ investigaram o caso de uma viga apoiada em uma fundação elástica,

enquanto Taheri e Ting¹² apresentaram um modelo para a análise de uma placa com condições de contorno arbitrárias.

Apesar da eficácia proporcionada pelo método dos elementos finitos na modelagem do subsistema estrutural, a principal dificuldade permanecia na complexidade matemática de se analisar sua interação com um subsistema de parâmetros concentrados.

Aliando as vantagens do método dos elementos finitos à versatilidade e modularidade da técnica dos grafos de ligação, Da Silva¹³ apresentou um procedimento para a representação de uma estrutura que interaja com subsistemas de natureza física distinta. Uma aplicação proposta consistia na análise de um veículo com quatro graus de liberdade trafegando sobre uma viga com apoios intermediários.

Deste modo, diferentes modelos estruturais podem ser analisados devido ao procedimento generalizado e, através da modularidade possibilitada pela técnica dos grafos de ligação, pode-se, ainda, acoplar subsistemas mecânicos com diferentes graus de complexidade.

Nos últimos anos diversos autores propuseram-se a investigar o problema de cargas móveis em estruturas^{14,15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26}. Apesar da crescente complexidade que vem sendo atribuída ao modelo estrutural, o carregamento continua sendo tratado como uma carga simples e constante.

O objetivo deste trabalho está no estudo da interação de uma estrutura, representada por uma viga ou por uma placa, com um carregamento móvel oriundo de um subsistema que possua uma dinâmica própria. A estrutura é modelada pela análise modal ou pelo método dos elementos finitos, sendo estes modelos devidamente representados através dos grafos de ligação, para possibilitar o seu acoplamento a um subsistema mecânico, modelado por esta técnica. O efeito de parâmetros importantes deste subsistema, como por exemplo, sua velocidade e suas características mecânicas, são levados em consideração na análise da resposta estrutural.

1.2 – DESENVOLVIMENTO

O presente trabalho está dividido em seis capítulos.

No Capítulo 1, apresenta-se a evolução dos modelos destinados a análise do problema de cargas móveis, assim como a importância de determinados aspectos que devem ser

considerados, e que constituem a principal motivação deste trabalho. Apresenta-se, também, a organização do corpo da dissertação.

O Capítulo 2 trata da modelagem de estruturas submetidas a carregamentos móveis quando se conhece a solução analítica da equação diferencial parcial de governo. Neste capítulo aborda-se a representação de vigas e placas a partir de seus modos de vibrar e frequências naturais.

O Capítulo 3 apresenta a análise de uma viga discretizada pelo método dos elementos finitos e representada por grafos multiligação. Compara-se os resultados obtidos por este modelo numérico com resultados provenientes da bibliografia. Ainda neste capítulo, investiga-se a influência de diversos parâmetros do subsistema mecânico na resposta da estrutura.

No Capítulo 4, estende-se a utilização desta metodologia para o estudo do comportamento de um modelo estrutural bidimensional, representado por uma placa com condições de contorno arbitrárias. Compara-se os resultados obtidos com os resultados de modelos simplificados disponíveis na literatura.

O Capítulo 5 apresenta alguns modelos mais sofisticados, específicos para a análise da interação veículo estrutura. Ressalta-se, através destes modelos, as vantagens de se utilizar um procedimento generalizado e modular na representação de um sistema de maior complexidade.

No Capítulo 6 são apresentados os comentários finais e as conclusões, assim como sugestões para o desenvolvimento de futuros trabalhos na área.

CAPÍTULO 2

MODELAGEM DO PROBLEMA DE CARGAS MÓVEIS ATRAVÉS DA TÉCNICA DOS GRAFOS DE LIGAÇÃO UTILIZANDO AS FREQUÊNCIAS NATURAIS E AS AUTOFUNÇÕES DA ESTRUTURA

2.1 – INTRODUÇÃO

A resposta de estruturas submetidas a carregamentos móveis tem, nas últimas décadas, despertado o interesse de diversas áreas da engenharia. O deslocamento dinâmico proporcionado por uma carga em movimento pode superar em até 75% o deslocamento estático máximo^{3, 10, 11, 27}.

Apesar de vários modelos terem sido sugeridos para o estudo desta classe de problemas, a grande maioria representa o carregamento móvel através de uma carga simples e constante. Em alguns casos, como na análise de veículos pesados trafegando sobre pontes e viadutos, esta simplificação não é apropriada, pois necessita-se de um subsistema que represente a dinâmica veicular.

A técnica dos grafos de ligação tem se mostrado eficiente na solução de sistemas que envolvam solicitações dinâmicas, inclusive quando há interação entre subsistemas de natureza distinta^{28, 29}. Deste modo, esta técnica torna-se perfeitamente aplicável ao estudo do comportamento de uma estrutura, modelada como sistema contínuo, quando submetida a um carregamento móvel proveniente de um subsistema modelado a partir de parâmetros concentrados.

O Apêndice A apresenta os conceitos fundamentais da técnica dos grafos de ligação, destacando os elementos básicos e a metodologia para a obtenção do modelo matemático representativo de um sistema dinâmico.

A abordagem do problema de cargas móveis em uma estrutura, via grafos de ligação, foi proposta por Margolis⁸ em 1976. Neste trabalho, foi apresentado um procedimento para o estudo da interação de um veículo com uma ponte. Uma viga Bernoulli-Euler com apoios intermediários e modelada a partir de suas autofunções foi utilizada para representar a ponte.

Embora o procedimento de modelagem proposto por Margolis⁸ tenha sido demonstrado para uma viga, devido a característica generalizada da técnica dos grafos de ligação, esta metodologia pode ser utilizada para outras estruturas. Para que isto seja possível,

basta que as frequências naturais e os modos de vibração da estrutura sejam definidos corretamente.

Neste capítulo, apenas como introdução ao problema de cargas móveis, o modelo de viga é revisto no Item 2.2. No Item 2.3, este procedimento é ampliado para a análise do comportamento dinâmico de uma placa submetida a um subsistema mecânico em movimento.

2.2 – CARGAS MÓVEIS SOBRE VIGAS

Devido sua origem clássica na análise dinâmica de pontes ferroviárias (estruturas que podem ser aproximadas com grande precisão por modelos unidimensionais), alguns autores apresentaram soluções analíticas para a equação diferencial parcial de governo de uma viga Bernoulli-Euler submetida a uma carga móvel simples e constante^{1, 2, 3}. Esta equação pode ser expressa, em termos de seu deslocamento transversal $w(x,t)$, por:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + r_v A \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = F(t) \mathbf{d}(x-\mathbf{v}t) \quad (2.1)$$

onde E , I , r_v e A são respectivamente, o módulo de elasticidade, o momento de inércia, a massa específica e a área da seção reta da viga, e \mathbf{v} é a velocidade do carregamento e $\mathbf{d}(x-\mathbf{v}t)$ é a Função Generalizada de Dirac .

Entretanto, sistemas que apresentem um forçamento $F(t)$ proveniente de um subsistema mecânico, conforme ilustrado na Figura 2.1, dificultam a obtenção de soluções analíticas para o modelo global.

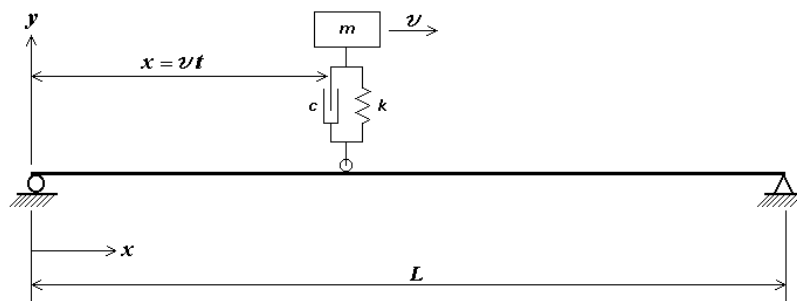


FIGURA 2.1: Viga bi-apoiada submetida a um oscilador móvel.

Uma alternativa interessante para os casos em que se conheça apenas a solução da parte homogênea da Equação 2.1, está na utilização de um procedimento baseado na técnica dos grafos de ligação, proposto por Karnopp *et alli*²⁸, que representa a estrutura através de seus modos de vibração.

Considerando, como na Figura 2.1, uma viga simplesmente apoiada em suas duas extremidades, tanto os deslocamentos, quanto os momentos, em $x = 0$ e $x = L$ serão nulos. Estas condições de contorno são expressas matematicamente, em função do deslocamento transversal $w(x,t)$ e suas derivadas, nas equações que se seguem:

$$w(0,t) = w(L,t) = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial^2 w(0,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 w(L,t)}{\partial x^2} = 0 \quad (2.3)$$

Assim, para uma viga com estas condições de contorno, obtém-se, na bibliografia disponível³⁰, as freqüências naturais (ω_n) e seus respectivos modos de vibrar (W_n).

$$\omega_n = \left(\frac{n\pi}{L} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho_v A}} \quad (2.4)$$

$$W_n = \text{sen} \left(\frac{n\pi x}{L} \right) \quad (2.5)$$

O grafo de ligação indicado para este sistema, é apresentado na Figura 2.2.

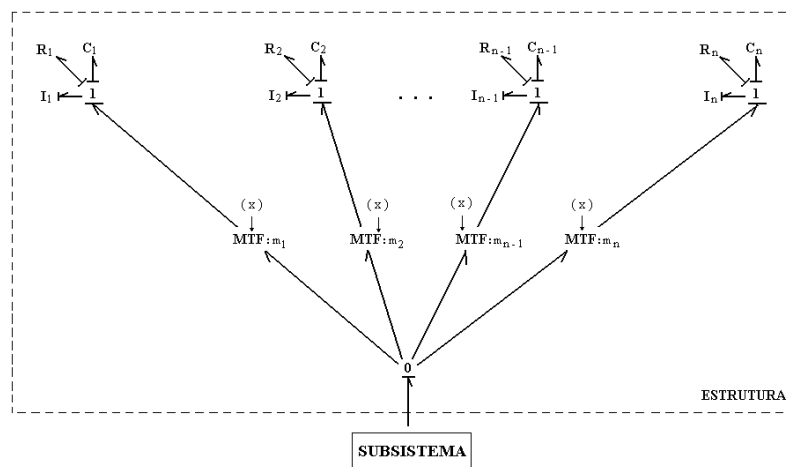


FIGURA 2.2: Grafo de ligação de uma estrutura que interage com um subsistema qualquer.

A parte correspondente a estrutura baseia-se no modelo proposto por Karnopp *et alii*²⁸ para o estudo de uma viga sujeita a flexão. Devido a característica modular da técnica, pode-se, facilmente, acoplar a estrutura a qualquer subsistema mecânico.

A cada junção 1 deste grafo está associado um modo de vibrar da estrutura. Como este procedimento é genérico, podem ser incluídos quantos modos forem necessários para a representação da dinâmica estrutural.

A junção 0, por sua vez, realiza o somatório da contribuição de cada modo, para compor a configuração deformada do sistema. Esta junção representa a Equação 2.6, que difere da equação utilizada na análise modal clássica, unicamente pelo fato de não estar expressa em função dos deslocamentos, mas sim das velocidades $\dot{w}(x, y, t)$ e $\mathbf{h}(t)$, respectivamente, fluxos real e modal.

$$\dot{w}(x, t) = \sum W_n(x) \mathbf{h}(t) \quad (2.6)$$

Em todos os modos são incluídos elementos inerciais (I_n), capacitivos (C_n) e resistivos (R_n), com a função de representar a inércia, a flexibilidade e o amortecimento modal respectivamente.

$$I_n = \frac{1}{2} \mathbf{r}_v AL \quad (2.7)$$

$$C_n = \frac{1}{I_n \mathbf{w}_n^2} \quad (2.8)$$

$$R_n = 2 \mathbf{x}_n \mathbf{w}_n I_n \quad (2.9)$$

onde \mathbf{X}_n é o coeficiente de amortecimento modal.

Os transformadores modulados (*MTF*) presentes no grafo realizam a transição das variáveis físicas para as variáveis modais e vice-versa. Estes transformadores representam a contribuição dos modos de vibração da estrutura no ponto de contato com o subsistema. Como neste trabalho o subsistema é móvel, suas coordenadas de posição mudam a cada instante, o que torna necessária a utilização de transformadores cujos módulos variem no tempo.

A técnica dos grafos de ligação permite que tanto o modelo matemático quanto a solução das equações sejam obtidas automaticamente a partir de códigos computacionais.

Apenas para ilustrar o procedimento de obtenção do modelo de estado, suponha-se, por exemplo, que uma carga simples desloque-se com uma velocidade constante (v) sobre uma viga bi-apoiada. Com base no grafo de ligação genérico apresentado na Figura 2.2 e, retendo-se os cinco primeiros modos para representar a resposta da estrutura, chega-se ao grafo representativo para este sistema dinâmico, que é apresentado na Figura 2.3.

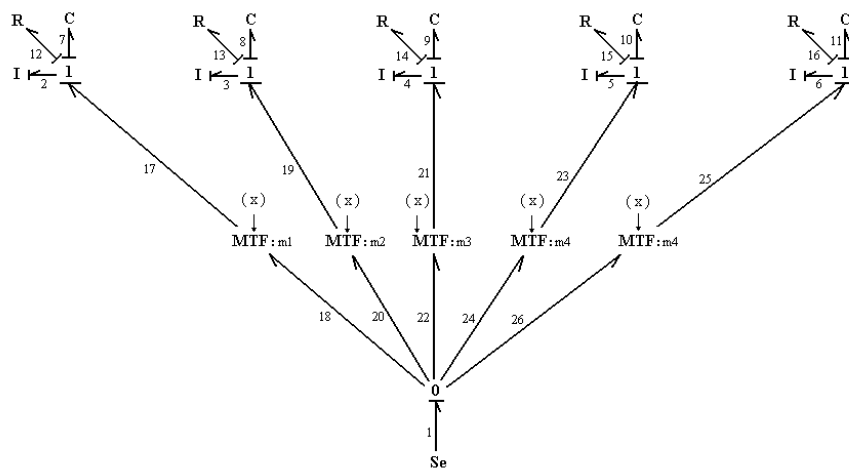


FIGURA 2.3: Grafo de ligação de uma viga submetida a uma carga simples

O modelo de estado associado a este grafo pode ser expresso por:

$$\dot{X} = AX + BU \quad (2.10)$$

$$Y = CX + DU \quad (2.11)$$

onde X é o vetor de variáveis de estado, U é o vetor de variáveis de entrada, Y é o vetor de variáveis de saída e A , B , C e D são matrizes com os coeficientes representativos das propriedades físicas do sistema e dos módulos dos transformadores modulados que representam as contribuições de cada modo na solução do problema.

Conhecendo apenas as variáveis de estado, quantidade de movimento (p) e deslocamento (q), pode-se prever o comportamento do sistema em qualquer instante desejado. Os elementos dos vetores e matrizes necessários ao cálculo das variáveis de estado são apresentados a seguir.

$$X = [p_2 \ p_3 \ p_4 \ p_5 \ p_6 \ q_7 \ q_8 \ q_9 \ q_{10} \ q_{11}]^T \quad (2.12)$$

$$U = [e_1] \quad (2.13)$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{I_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{R_2}{I_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{R_3}{I_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{R_4}{I_4} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{R_5}{I_5} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_5} \\ \frac{1}{I_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

$$B = [m_1 \ m_2 \ m_3 \ m_4 \ m_5 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0] \quad (2.15)$$

Os componentes do vetor B representam os módulos dos transformadores no ponto de contato da carga com a viga. Como a carga e_l está se deslocando com uma velocidade constante (\mathbf{v}) sobre a viga, sua posição (x) em cada instante (t) pode ser expressa por:

$$x = \mathbf{v}t \quad (2.16)$$

Substituindo a Equação 2.16 na Equação 2.5, tem-se, para os cinco transformadores modulados:

$$m_1 = \text{sen}\left(\frac{\mathbf{p}\mathbf{v}t}{L}\right) \quad (2.17)$$

$$m_2 = \text{sen}\left(\frac{2pvt}{L}\right) \quad (2.18)$$

$$m_3 = \text{sen}\left(\frac{3pvt}{L}\right) \quad (2.19)$$

$$m_4 = \text{sen}\left(\frac{4pvt}{L}\right) \quad (2.20)$$

$$m_5 = \text{sen}\left(\frac{5pvt}{L}\right) \quad (2.21)$$

A partir deste sistema de equações, escrito na forma matricial, pode-se obter o comportamento da estrutura, em função das variáveis de estado, em qualquer ponto e instante.

A Figura 2.4 apresenta o deslocamento vertical do centro de uma viga de aço de 2 m de comprimento, com uma seção reta de 0,02540 m de largura e 0,00635 m de altura, e coeficiente de amortecimento modal de 5% para todos os modos, quando submetida a uma carga de 5 N com velocidade constante de 5 m/s, que percorre uma distância de 1 m antes de entrar em contato com a viga.

Pode-se observar neste caso que a viga, inicialmente em repouso, sofre seus maiores deslocamentos enquanto está em contato com o carregamento.

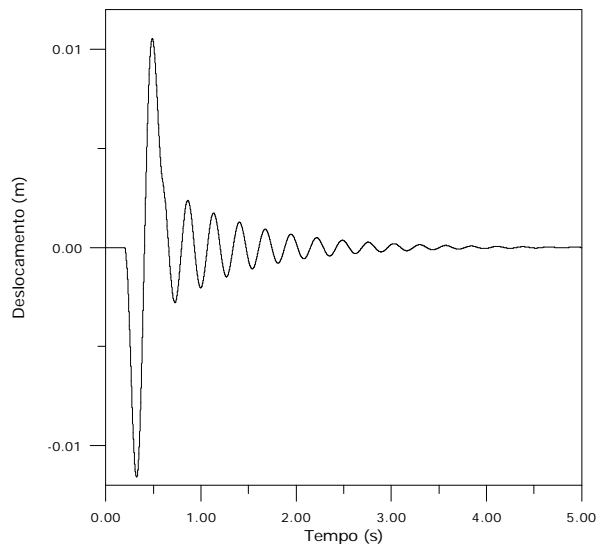


FIGURA 2.4: Deslocamento vertical do centro de uma viga

2.3 – CARGAS MÓVEIS SOBRE PLACAS

Quando a relação entre o comprimento de uma determinada estrutura e a sua largura não for grande o suficiente, um modelo unidimensional pode não ser uma boa aproximação. Porém, a análise do problema de cargas móveis através de modelos bidimensionais, como uma placa, pode dificultar a obtenção do modelo matemático, principalmente quando o carregamento é oriundo de um subsistema mecânico.

No entanto, devido a natureza generalizada da técnica dos grafos de ligação, pode-se estender a metodologia apresentada no Item 2.2 para representar uma placa simplesmente apoiada, submetida a ação de um sistema dinâmico que desloca-se com uma determinada velocidade ao longo de uma trajetória plana pré-estabelecida, conforme mostrado na Figura 2.5. Neste caso um oscilador, composto por massa, mola e amortecedor representa o subsistema que interage dinamicamente com a placa.

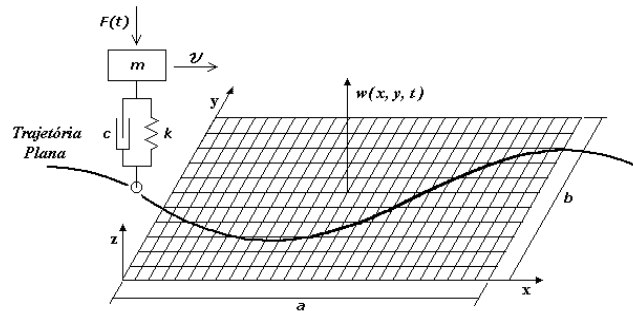


FIGURA 2.5: Placa simplesmente apoiada submetida a um oscilador móvel.

A Equação 2.22 descreve a vibração livre de uma placa modelada segundo as hipóteses de Kichhoff, expressa em função de seu deslocamento transversal $w(x, y, t)$.

$$D_E \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) + \mathbf{r}_a \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0 \quad (2.22)$$

$$D_E = \frac{Eh^3}{12(1-\mathbf{n}^2)} \quad (2.23)$$

onde D_E é a rigidez flexional de uma placa isotrópica de espessura h , matematicamente representada pela Equação 2.23. E , ν e ρ_a são, respectivamente, módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson e densidade de área do material.

As frequências naturais (ω_{mn}) de algumas estruturas, e seus respectivos modos de vibrar (W_{mn}), podem ser encontrados na literatura. Para o caso de uma placa simplesmente apoiada, Meirovitch³⁰ mostra que:

$$\omega_{mn} = \mathbf{p}^2 \left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right] \sqrt{\frac{D_E}{\rho_a}} \quad (2.24)$$

$$W_{mn}(x, y) = \text{sen}\left(\frac{m\mathbf{p}x}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{n\mathbf{p}y}{b}\right) \quad (2.25)$$

Neste trabalho considera-se, os primeiros quatro modos de vibrar (W_{11} , W_{12} , W_{21} e W_{22}) para representar os deslocamentos da placa, porém um número maior de modos pode ser facilmente incluído no modelo caso seja necessário. A forma dos quatro primeiros modos pode ser visualizada na Figura 2.6.

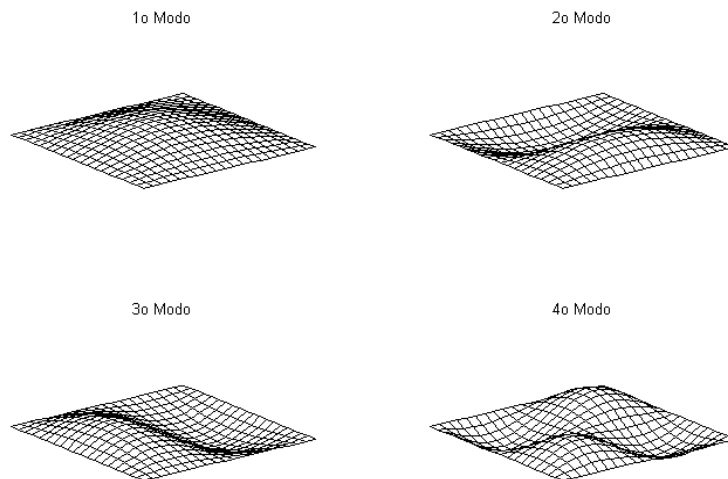


FIGURA 2.6: Modos de vibrar da placa

Para a construção do grafo representativo deste sistema, parte-se do mesmo grafo genérico apresentado na Figura 2.2. A adaptação para o problema de placas é perfeitamente

válida, desde que se substitua o módulo dos transformadores pelos modos de vibração da placa.

Devido a característica modular da técnica dos grafos de ligação pode-se, facilmente, acoplar a estrutura a qualquer subsistema mecânico. Para representar um oscilador, foi construído um grafo no qual estivessem incluídos seus efeitos inerciais (m), capacitivos ($1/k$) e resistivos (c), característicos de um sistema massa-mola-amortecedor. O grafo de ligação que representa o modelo global é apresentado na Figura 2.7.

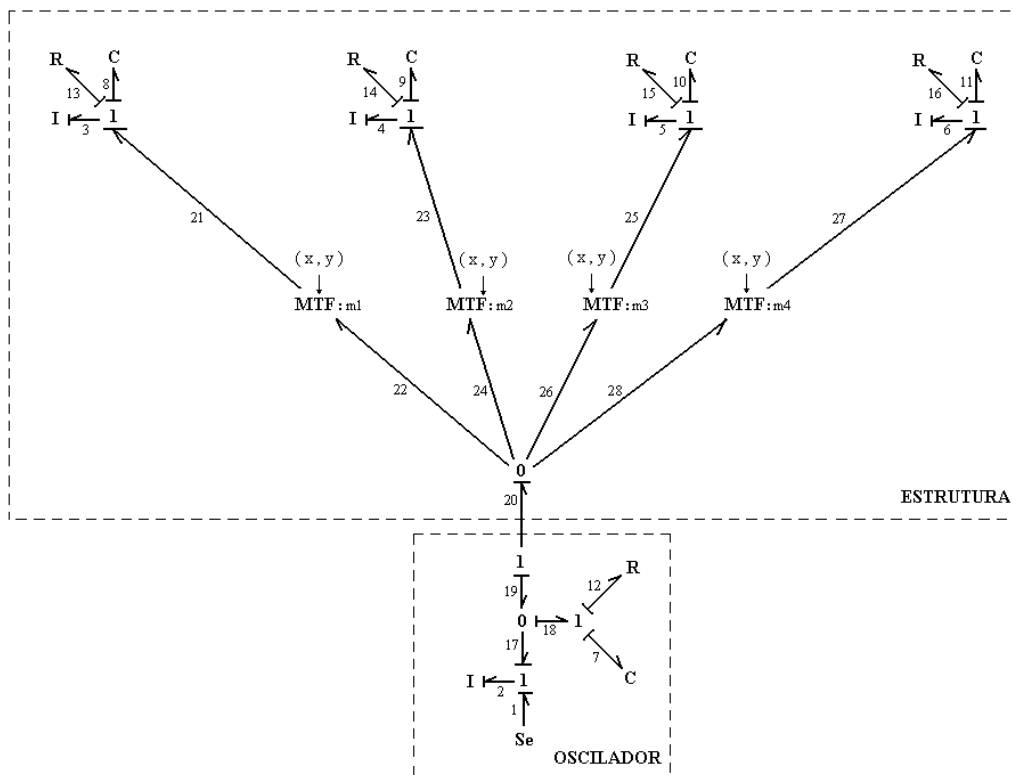


FIGURA 2.7: Grafo de Ligação para uma placa que interage com um oscilador

Como no modelo de viga, a cada junção 1 do grafo da estrutura estão associados a inércia (I_{mn}), a flexibilidade (C_{mn}) e o amortecimento (R_{mn}) modal. Para a placa, obtém-se:

$$I_{mn} = \frac{1}{4} r_a ab \quad (2.26)$$

$$C_{mn} = \frac{1}{I_{mn} \mathbf{w}_{mn}^2} \quad (2.27)$$

$$R_{mn} = 2\mathbf{x}_{mn} \mathbf{w}_{mn} I_{mn} \quad (2.28)$$

onde \mathbf{x}_{mn} é o coeficiente de amortecimento modal.

Como o oscilador desloca-se sobre a placa, ao longo de uma trajetória plana qualquer, sua velocidade \mathbf{v} é expressa em função das componentes \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 nos eixos x e y , respectivamente. Através destas componentes calcula-se a posição do oscilador em um dado instante do tempo, o que possibilita a determinação dos módulos dos transformadores modulados (*MTF*).

$$m_1 = \text{sen}\left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_1 \cdot t}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_2 \cdot t}{b}\right) \quad (2.29)$$

$$m_2 = \text{sen}\left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_1 \cdot t}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{2\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_2 \cdot t}{b}\right) \quad (2.30)$$

$$m_3 = \text{sen}\left(\frac{2\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_1 \cdot t}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_2 \cdot t}{b}\right) \quad (2.31)$$

$$m_4 = \text{sen}\left(\frac{2\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_1 \cdot t}{a}\right) \text{sen}\left(\frac{2\mathbf{p} \cdot \mathbf{v}_2 \cdot t}{b}\right) \quad (2.32)$$

Para a análise das interações energéticas entre os dois sistemas, pode-se avaliar o fluxo de potência através da ligação 20, que será calculado por:

$$P_{20} = e_{20} f_{20} \quad (2.33)$$

O modelo de estado associado ao grafo da Figura 2.7 pode ser expresso através das Equações 2.10 e 2.11, sendo necessário, apenas, que os coeficientes dos vetores e matrizes sejam obtidos adequadamente para o modelo em questão.

$$X = [p_2 \quad p_3 \quad p_4 \quad p_5 \quad p_6 \quad q_7 \quad q_8 \quad q_9 \quad q_{10} \quad q_{11}]^T \quad (2.34)$$

$$U = [e_1] \quad (2.35)$$

$$Y = [e_{20} \quad f_{20}]^T \quad (2.36)$$

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{c}{m} & \frac{m_1 c}{I_{11}} & \frac{m_2 c}{I_{12}} & \frac{m_3 c}{I_{21}} & \frac{m_4 c}{I_{22}} & k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{m_1 c}{m} & -(R_{11} + m_1^2 c) & -\frac{m_1 m_2 c}{I_{12}} & -\frac{m_1 m_3 c}{I_{21}} & -\frac{m_1 m_4 c}{I_{22}} & 0 & -\frac{1}{C_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{m_2 c}{m} & -\frac{m_1 m_2 c}{I_{11}} & -(R_{12} + m_2^2 c) & -\frac{m_2 m_3 c}{I_{21}} & -\frac{m_2 m_4 c}{I_{22}} & 0 & 0 & -\frac{1}{C_{12}} & 0 & 0 \\ \frac{m_3 c}{m} & -\frac{m_1 m_3 c}{I_{11}} & -\frac{m_2 m_3 c}{I_{12}} & -(R_{21} + m_3^2 c) & -\frac{m_3 m_4 c}{I_{22}} & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_{21}} & 0 \\ \frac{m_4 c}{m} & -\frac{m_1 m_4 c}{I_{11}} & -\frac{m_2 m_4 c}{I_{12}} & -\frac{m_3 m_4 c}{I_{21}} & -(R_{22} + m_4^2 c) & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{C_{22}} \\ -\frac{1}{m} & \frac{m_1}{I_{11}} & \frac{m_2}{I_{12}} & \frac{m_3}{I_{21}} & \frac{m_4}{I_{22}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{I_{11}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{I_{12}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_{21}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{I_{22}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

$$B = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T \quad (2.38)$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{c}{m} & -\frac{m_1 c}{I_{11}} & -\frac{m_2 c}{I_{12}} & -\frac{m_3 c}{I_{21}} & -\frac{m_4 c}{I_{22}} & -k & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{m_1}{I_{11}} & \frac{m_2}{I_{12}} & \frac{m_3}{I_{21}} & \frac{m_4}{I_{22}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

$$D = [0] \quad (2.40)$$

De posse do modelo implementado, propôs-se um exemplo, no qual um oscilador, com uma velocidade de 7 m/s, atravessava uma placa de aço simplesmente apoiada. Definiu-se uma trajetória retilínea que passava pelo centro da placa, paralelamente a um de seus lados.

Para uma placa com dimensões: $a = 1$ m, $b = 1$ m e $h = 0,001$ m, adotou-se um coeficiente de amortecimento modal (\mathbf{x}_{mn}) de 5% para todos os modos. Para o oscilador, considerou-se uma massa (m) de 1 kg, suspensa por uma mola de rigidez (k) igual a 1500 N/m e um amortecedor com um coeficiente (c) de 10 N.s/m

Considerando que a única força atuante sobre o oscilador era o seu próprio peso, admitiu-se que ele começou a atravessar a placa no instante $t = 2$ s, tempo este suficiente para que a sua posição de equilíbrio fosse atingida.

A Figura 2.8 apresenta os resultados obtidos para quatro instantes diferentes da simulação. Na Figura 2.8 (a), antes de entrar em contato com a estrutura, o oscilador apresenta

a sua configuração de equilíbrio e a placa sua configuração indeformada. Nos instantes posteriores, Figura 2.8 (b) e Figura 2.8 (c), quando o oscilador encontra-se nas posições 1/3 e 2/3 da placa, respectivamente, observa-se que seu comprimento sofre uma variação, conforme a estrutura se deforma. Na Figura 2.8 (d), uma vez que os dois subsistemas não mais interagem, pode-se verificar o amortecimento da estrutura trazendo-a para a posição de equilíbrio.

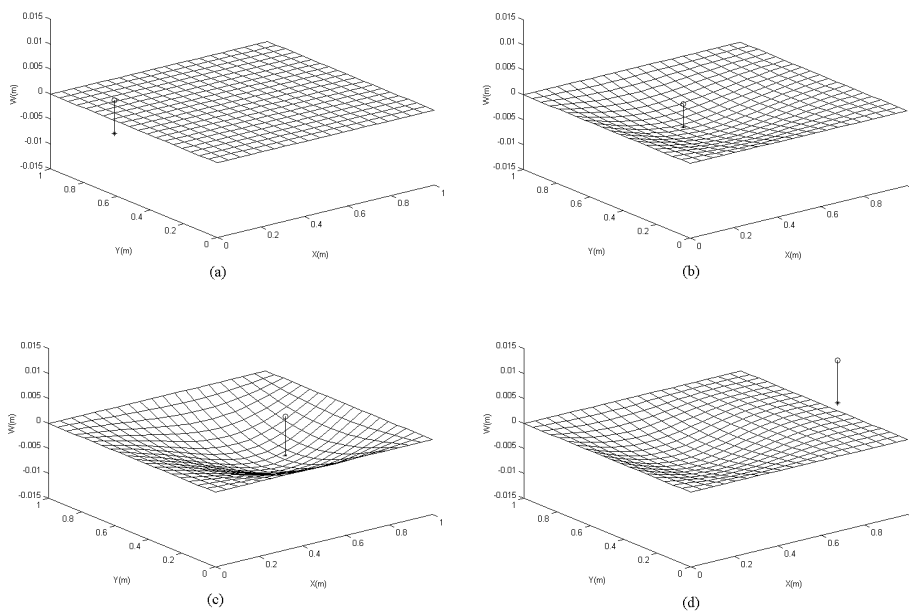


FIGURA 2.8: Configuração deformada do sistema em instantes diferentes

Para melhor analisar a variação na deformação do oscilador e da placa, interagindo entre si, apresenta-se na Figura 2.9 as vistas laterais do sistema para três instantes distintos.

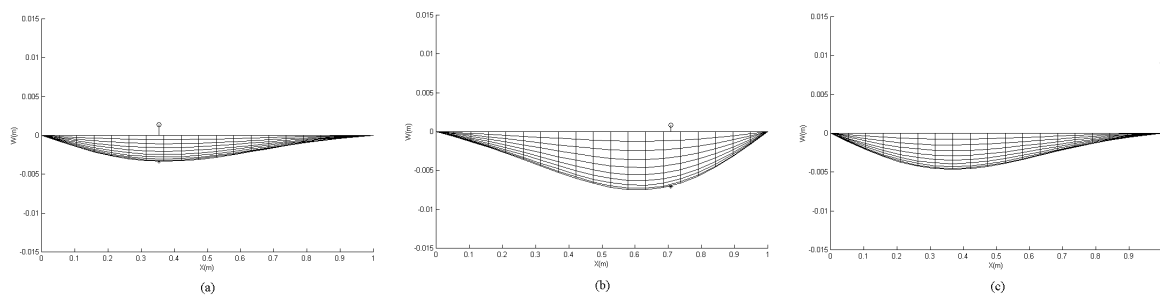


FIGURA 2.9: Vista lateral do sistema em: (a) $t = 2,05$ s; (b) $t = 2,10$ s e (c) $t = 2,14$ s

Como se pode observar, existe uma relação entre as deformações dos subsistemas. Ao entrarem em contato, o oscilador cede energia para a placa e, enquanto ele a atravessa, uma parte desta energia lhe é devolvida. Esta relação fica mais clara quando se examina, na Figura 2.10, o fluxo de potência entre os subsistemas. Este resultado é de grande importância no estudo da interação energética pois, através dele, pode-se saber em que momento oscilador e placa fornecem ou recebem energia um do outro. É importante ressaltar que este resultado é facilmente obtido através da técnica dos grafos de ligação, como mostra a Equação 2.33.

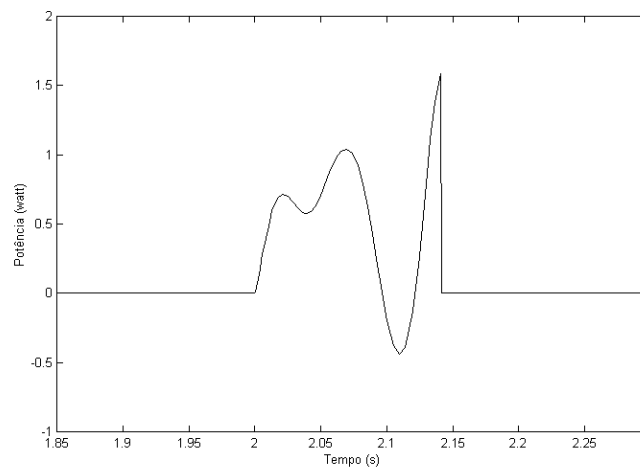


FIGURA 2.10: Fluxo de potência entre os subsistemas

Pode-se obter, também, o comportamento das variáveis no domínio do tempo, como mostra a Figura 2.11. Neste exemplo, o deslocamento vertical do oscilador, em cada instante, é apresentado para diferentes velocidades.

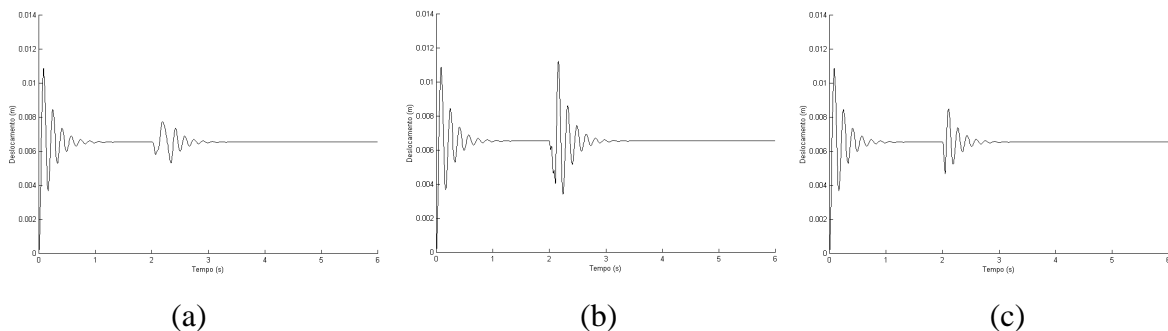


FIGURA 2.11: Deslocamento do oscilador para: (a) $v=3\text{m/s}$; (b) $v=8,88\text{ m/s}$ e (c) $v=20\text{m/s}$

Analisando cuidadosamente estes resultados observa-se que, para uma determinada faixa de velocidades, o sistema apresenta um comportamento crítico. Este comportamento será investigado nos dois capítulos posteriores, tanto para o caso de vigas, quanto para placas.

O fluxo de potência entre os subsistemas, para três velocidades distintas, é apresentado na Figura 2.12. Observa-se que para velocidades mais elevadas o fluxo de potência dá-se apenas do oscilador para a estrutura.

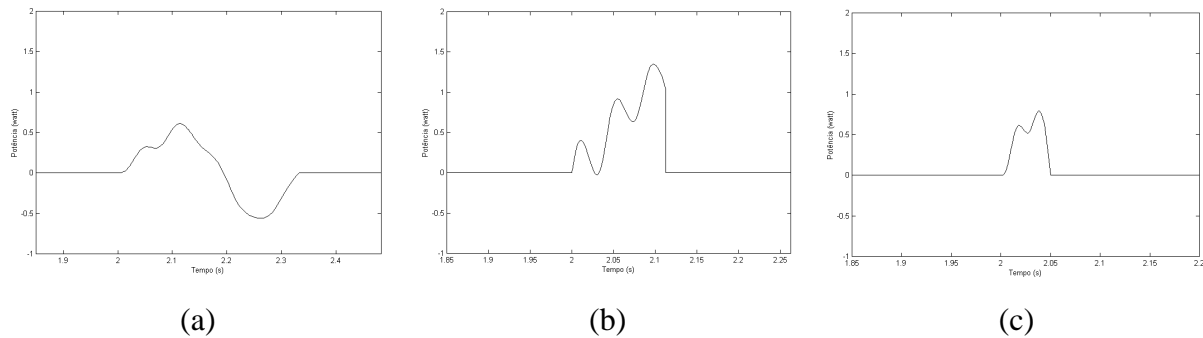


FIGURA 2.12: Fluxo de potência para: (a) $v = 3 \text{ m/s}$; (b) $v = 8,88 \text{ m/s}$ e (c) $v = 20 \text{ m/s}$

Outros resultados podem, ainda, ser facilmente obtidos a partir do modelo de estado apresentado nas Equações 2.10 e 2.11 uma vez que qualquer informação do modelo físico pode ser escrita a partir das variáveis de estado X e do vetor de entradas U .

A facilidade de implementação, aliada a um baixo custo computacional, tornam esta metodologia bastante atrativa. Porém, conforme dito anteriormente, sua utilização limita-se aos casos em que se conheça a solução homogênea da equação de governo do subsistema estrutural.

CAPÍTULO 3

ANÁLISE DINÂMICA DE CARGAS MÓVEIS EM VIGAS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS REPRESENTADOS EM GRAFOS MULTILIGAÇÃO

3.1 – INTRODUÇÃO

Atualmente, pode-se observar que a grande maioria dos modelos estruturais presentes nas aplicações práticas da engenharia, possuem irregularidades geométricas ou condições de contorno arbitrárias. Mesmo para estes modelos, a equação diferencial de governo pode ser obtida sem grandes dificuldades. Porém, a obtenção de uma solução analítica para esta equação nem sempre é possível.

Uma alternativa viável é a adoção de procedimentos numéricos para o cálculo de uma solução aproximada para o problema. Entre estes procedimentos estão os métodos variacionais, o método das diferenças finitas e o método dos elementos finitos.

Por ser extremamente versátil e proporcionar resultados de grande precisão, o método dos elementos finitos tem se destacado como uma das mais poderosas ferramentas na representação de estruturas complexas. Este método caracteriza-se por discretizar um domínio de geometria irregular em subdomínios de geometrias mais simples, reduzindo um sistema contínuo de infinitas variáveis a um modelo com um número finito de graus de liberdade.

Contudo, mesmo sendo a melhor opção para a modelagem do subsistema estrutural, este método não se apresenta como o mais apropriado para analisar a interação entre subsistemas distintos.

Utilizando a filosofia dos grafos multiligação, Da Silva¹³ propôs um procedimento para a modelagem de subsistemas estruturais a partir das matrizes de massa, rigidez e amortecimento, obtidas pelo método dos elementos finitos. Deste modo, devido a característica modular da técnica dos grafos de ligação, pode-se acoplar qualquer subsistema à estrutura, obtendo então, um grafo representativo do modelo dinâmico global.

Apresenta-se a seguir uma análise do problema de cargas móveis em vigas, aplicando o procedimento proposto por Da Silva¹³. Parte-se de um modelo simples, no qual se considera o carregamento como uma carga constante, estendendo, em seguida, para um modelo mais sofisticado, onde o carregamento provém de um subsistema massa – mola – amortecedor. Avalia-se o comportamento dinâmico dos dois subsistemas no domínio do tempo, assim como

a influência de parâmetros importantes do oscilador, como sua velocidade e suas características mecânicas, na resposta da estrutura.

Um código computacional foi desenvolvido em FORTRAN 90 para a simulação dos modelos obtidos através deste procedimento. Com o objetivo de ser o mais genérico possível, este código, que é apresentado detalhadamente no Apêndice B, permite que seja escolhido o tipo de estrutura a ser analisada (viga ou placa), e que o número de elementos e as condições de contorno necessários à sua representação, sejam determinados automaticamente. Pode-se ainda, definir as propriedades do carregamento atuante, assim como o tipo de movimento por ele exercido.

Com o intuito de validar o procedimento adotado, alguns resultados obtidos são comparados com resultados oriundos de modelos disponíveis na bibliografia.

3.2 – O MODELO ESTRUTURAL

O grafo multiligação genérico de um subsistema estrutural, proposto por Da Silva¹³ para representar uma estrutura modelada pelo Método dos Elementos Finitos, é apresentado na Figura 3.1.

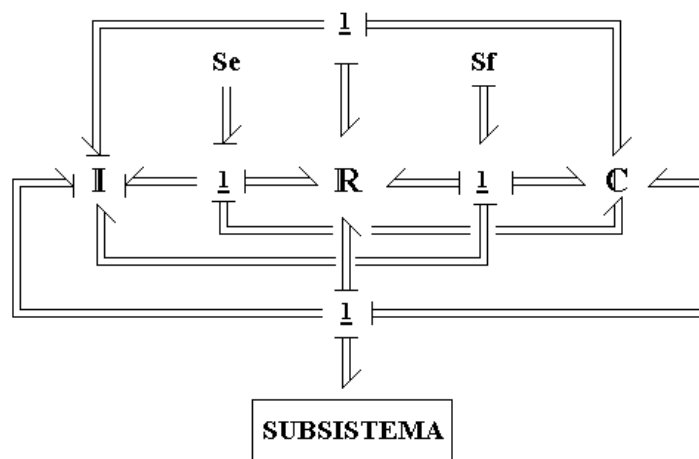


FIGURA 3.1: Grafo multiligação representativo do subsistema estrutural

Este grafo aplica-se a qualquer estrutura que possa ser representada em termos de suas matrizes de massa $[M]$, de flexibilidade $[K]^{-1}$ e de amortecimento $[B]$, representadas na Figura 3.1 pelos campos multiportas \mathbf{I} , \mathbf{C} e \mathbf{R} respectivamente.

As fontes de esforço (**Se**) e fluxo (**Sf**) representam a possibilidade de existirem carregamentos e velocidades prescritas no modelo e como se pode observar, existe ainda uma multiligação aberta, através da qual grafos de outros subsistemas podem ser acoplados.

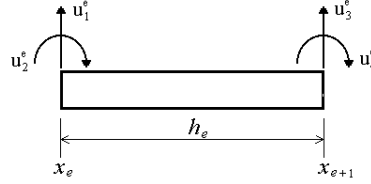


FIGURA 3.2: Graus de liberdade de um elemento de viga

Para a discretização de uma estrutura pelo método dos elementos finitos, torna-se necessária a obtenção de uma solução aproximada para o campo de deslocamentos $w(x, t)$ no domínio do elemento. Considerando um elemento de viga, conforme a Figura 3.2, com quatro graus de liberdade:

$$u_1^e = w(x_e), \quad u_2^e = (-dw/dx)|_{x=x_e}, \quad u_3^e = w(x_{e+1}), \quad u_4^e = (-dw/dx)|_{x=x_{e+1}} \quad (3.1)$$

pode-se, através da Equação 3.2 e das funções de interpolação cúbica de Hermite \mathbf{f}_i^e , determinar o deslocamento transversal em qualquer ponto no interior do elemento.

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^4 \mathbf{f}_i^e(x) \cdot u_i^e(t) \quad (3.2)$$

As funções de interpolação \mathbf{f}_i^e , expressas em função das coordenadas locais do elemento³¹, são apresentadas a seguir:

$$\mathbf{f}_1^e = 1 - 3\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^2 + 2\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^3 \quad (3.3)$$

$$\mathbf{f}_2^e = -\bar{x}\left(1 - \frac{\bar{x}}{h_e}\right)^2 \quad (3.4)$$

$$\mathbf{f}_3^e = 3\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^2 - 2\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^3 \quad (3.5)$$

$$\mathbf{f}_4^e = -\bar{x}\left[\left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)^2 - \left(\frac{\bar{x}}{h_e}\right)\right] \quad (3.6)$$

Deste modo, definidas as funções de interpolação, determina-se os coeficientes das matrizes elementares de massa (M_{ij}^e) e rigidez (K_{ij}^e).

$$K_{ij}^e = EI \int_{x_e}^{x_{e+1}} (d^2 \mathbf{f}_i^e / dx^2) (d^2 \mathbf{f}_j^e / dx^2) dx \quad (3.7)$$

$$M_{ij}^e = \mathbf{r}_v A \int_{x_e}^{x_{e+1}} \mathbf{f}_i^e \mathbf{f}_j^e dx \quad (3.8)$$

Estas matrizes foram definidas através de uma formulação consistente, para um elemento isolado da malha³¹. Para a construção das matrizes globais, que são utilizadas por este procedimento para a representação da estrutura, deve-se compatibilizar os esforços e deslocamentos nos graus de liberdade do modelo, impondo condições de continuidade e equilíbrio às variáveis primárias e secundárias.

A matriz de amortecimento do modelo estrutural pode ser obtida através de uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez, conhecida como amortecimento proporcional.

$$[\mathbf{B}] = \mathbf{a} [\mathbf{M}] + \mathbf{b} [\mathbf{K}] \quad (3.9)$$

Neste caso, as constantes de amortecimento \mathbf{a} e \mathbf{b} , são escolhidas³² de modo que sejam proporcionados os coeficientes de amortecimento modal (\mathbf{x}_i) desejados.

$$\mathbf{a} = \frac{2\mathbf{w}_1 \mathbf{w}_2 (\mathbf{x}_1 \mathbf{w}_2 - \mathbf{x}_2 \mathbf{w}_1)}{(\mathbf{w}_2^2 - \mathbf{w}_1^2)} \quad (3.10)$$

$$\mathbf{b} = \frac{2(\mathbf{x}_2 \mathbf{w}_2 - \mathbf{x}_1 \mathbf{w}_1)}{(\mathbf{w}_2^2 - \mathbf{w}_1^2)} \quad (3.11)$$

Assim, conhecendo-se as matrizes globais características de um subsistema estrutural, pode-se representá-lo¹³, com relativa facilidade, através da técnica dos grafos de ligação. Este procedimento facilita a obtenção de um modelo matemático que represente a interação desta estrutura com outros subsistemas.

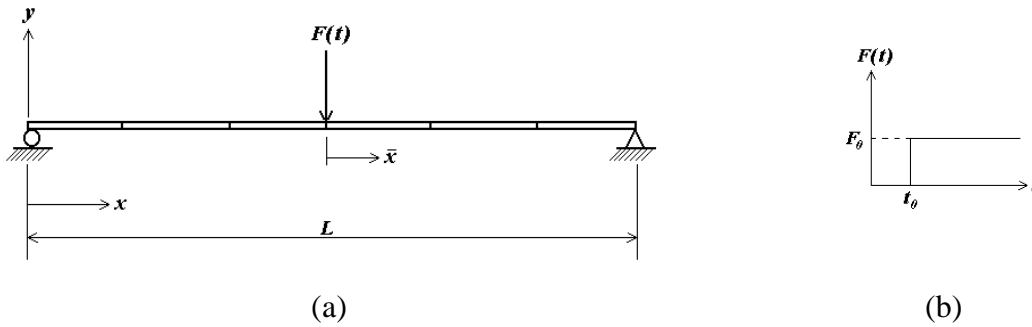


FIGURA 3.3: Viga bi-apoiada submetida a uma carga aplicada subitamente

A Figura 3.3 apresenta uma viga Bernoulli-Euler bi-apoiada e submetida a uma fonte de esforço (Se), representada por uma carga $F(t)$ aplicada subitamente na seção média de seu vão.

Como não há subsistema interagindo com a viga, e não existem fluxos prescritos para nenhum de seus graus de liberdade, o grafo do modelo estrutural pode ser simplificado significativamente, conforme ilustrado na Figura 3.4.

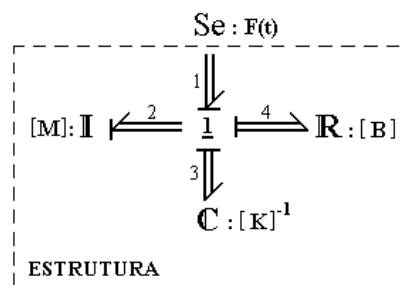


FIGURA 3.4: Grafo multiligação de uma estrutura com apenas uma fonte de esforço

Através dos procedimentos da técnica dos grafos de ligação, apresentados no Apêndice A, obtém-se para a junção vetorial $\mathbf{1}$, as equações de estado do sistema.

$$\dot{\mathbf{p}}_2 = -[\mathbf{K}]\mathbf{q}_3 - [\mathbf{B}][\mathbf{M}]^{-1}\mathbf{p}_2 + \mathbf{e}_1 \quad (3.12)$$

$$\dot{\mathbf{q}}_3 = [\mathbf{M}]^{-1}\mathbf{p}_2 \quad (3.13)$$

onde \mathbf{e}_1 , \mathbf{p}_2 e \mathbf{q}_3 são, respectivamente, os vetores com as forças generalizadas, com as quantidades de movimento e com os deslocamentos, associados a cada grau de liberdade do modelo estrutural.

Manipulando matematicamente as equações de estado obtidas por este procedimento, pode-se demonstrar como o método dos elementos finitos é representado pela técnica dos grafos de ligação. Substituindo a Equação 3.13 na Equação 3.12:

$$[\mathbf{M}]\ddot{\mathbf{q}}_3 = -[\mathbf{K}]\mathbf{q}_3 - [\mathbf{B}]\dot{\mathbf{q}}_3 + \mathbf{e}_1 \quad (3.14)$$

$$[\mathbf{M}]\dot{\mathbf{q}}_3 + [\mathbf{B}]\dot{\mathbf{q}}_3 + [\mathbf{K}]\mathbf{q}_3 = \mathbf{e}_1 \quad (3.15)$$

Sabendo-se que \mathbf{q}_3 representa o vetor com os graus de liberdade do modelo estrutural e que \mathbf{e}_1 é o vetor com as forças generalizadas atuantes, chega-se à Equação 3.16 que representa a equação clássica do método dos elementos finitos.

$$[\mathbf{M}]\{\ddot{u}\} + [\mathbf{B}]\{\dot{u}\} + [\mathbf{K}]\{u\} = \{F\} \quad (3.16)$$

Para facilitar a implementação computacional, as Equações 3.12 e 3.13 podem ser escritas na forma matricial apresentada na Equação 2.10:

$$\dot{X} = AX + BU \quad (2.10)$$

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_2 \\ \dot{\mathbf{q}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[\mathbf{B}][\mathbf{M}]^{-1} & -[\mathbf{K}] \\ [\mathbf{M}]^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [\mathbf{I}] \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{e}_1 \quad (3.17)$$

Deste modo, através do modelo computacional, pode-se determinar o número de elementos necessários para compor uma malha que represente com boa precisão o comportamento dinâmico da estrutura.

Para o modelo físico apresentado na Figura 3.3, por exemplo, considerou-se uma viga de aço, com 2 m de comprimento e com uma seção reta de 0,0254m de largura e 0,00635 m de altura.

A Tabela 3.1 compara as frequências naturais de uma viga com estas características, calculadas para malhas com dois, quatro, seis, oito, dez e doze elementos. Observa-se que os resultados obtidos convergem rapidamente para a solução analítica, a medida que se aumenta o número de elementos do modelo.

TABELA 3.1: Frequências naturais de uma viga Bernoulli-Euler bi-apoiada

Número de Elementos	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6
2	23,306					
4	23,221	93,225				
6	23,216	92,934	209,757			
8	23,215	92,883	209,201	372,901		
10	23,215	92,869	209,044	372,051	582,658	
12	23,215	92,864	208,987	371,736	581,496	839,028
Solução Analítica	23,215	92,859	208,932	371,435	580,368	835,730

O deslocamento transversal do nó central de uma viga com doze elementos submetida a uma carga de 5 N aplicada subitamente no instante $t = 1$ s em $x = L/2$, é apresentado na Figura 3.5. As constantes de amortecimento proporcional (**a** e **b**) foram obtidas através das Equações 3.10 e 3.11, considerando $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = 5\%$.

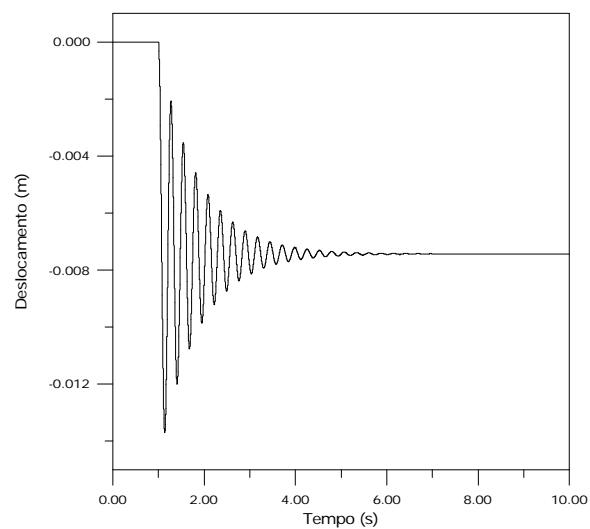


FIGURA 3.5: Deslocamento transversal do nó central da viga

A partir deste resultado verifica-se que o nó central da viga, após terminado o regime transiente, atinge sua posição de equilíbrio estático. Esta posição coincide exatamente (ver Tabela 3.2) com o deslocamento estático analítico³³ obtido pela Equação 3.18.

$$W_{est} = -\frac{F_0 L^3}{48EI} \quad (3.18)$$

TABELA 3.2: Comparação entre os deslocamentos numérico e analítico

Equilíbrio Estático do Nó Central	$-7,435 \times 10^{-3} \cdot m$
Deslocamento Estático Analítico (W_{est})	$-7,435 \times 10^{-3} \cdot m$

3.3 – VIGA SUBMETIDA A CARGA MÓVEL CONSTANTE

Com o objetivo de analisar a resposta dinâmica de uma viga submetida a um carregamento móvel considera-se, a princípio, apenas uma carga simples e constante, conforme ilustrado na Figura 3.6.

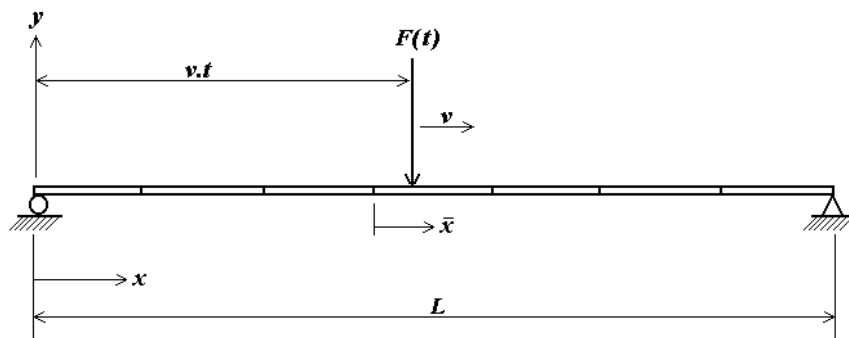


FIGURA 3.6: Viga bi-apoiada submetida a uma carga móvel

Este sistema difere do modelo analisado no Item 3.2, pelo fato da carga estar em movimento, com seu ponto de contato com a estrutura variando a cada instante de tempo.

O grafo de ligação associado a este sistema é apresentado na Figura 3.7.

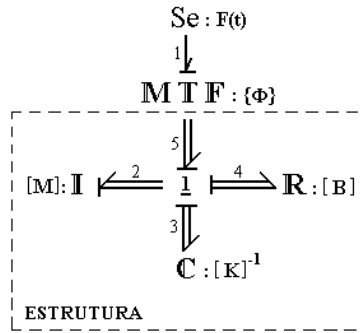


FIGURA 3.7: Grafo de ligação de uma estrutura submetida a uma carga móvel

Como a carga está em movimento, seu ponto de aplicação não se limita apenas aos nós, tornando-se necessária sua representação no interior do elemento de viga. Na técnica dos grafos de ligação esta função é desempenhada por um multitransformador modulado ($\mathbf{M T F}$), cujo módulo é definido através das funções de interpolação do elemento, calculadas no ponto de aplicação da carga.

O modelo matemático obtido a partir do grafo da Figura 3.7, escrito na forma matricial em função das variáveis de estado e de entrada do sistema, é apresentado na Equação 3.19.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_2 \\ \dot{\mathbf{q}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[\mathbf{B}][\mathbf{M}]^{-1} & -[\mathbf{K}] \\ [\mathbf{M}]^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \{\Phi\} \\ 0 \end{bmatrix} [e_1] \quad (3.19)$$

Deve-se ressaltar que o módulo do multitransformador $\{\Phi\}$, é um vetor cujo número de coeficientes depende do número de graus de liberdade do modelo. Porém, apenas quatro destes coeficientes, correspondentes aos graus de liberdade do elemento de viga no qual a carga esteja atuando, assumem valores diferentes de zero. Assim, existe um sub-vetor 4×1 que a medida que a carga se move para o próximo elemento, se desloca para os graus de liberdade representativos deste novo elemento.

Os valores dos termos deste sub-vetor podem ser calculados a partir das Equações 3.3, 3.4, 3.5 e 3.6. Como a carga está em movimento, sua posição \bar{x} pode ser definida por:

$$\bar{x} = \mathbf{v}(t - t_e) \quad (3.20)$$

onde t_e é o instante em que a carga entra no elemento.

Utilizando o código computacional apresentado no Apêndice B, pode-se simular o comportamento dinâmico da estrutura para diferentes velocidades do carregamento, e comparar os resultados obtidos com resultados provenientes da literatura.

A Tabela 3.3 apresenta o fator dinâmico de amplificação (F_{din}), definido como sendo a razão do máximo deslocamento dinâmico pelo máximo deslocamento estático (W_{est}), para diferentes parâmetros adimensionais de velocidade (T / τ). O símbolo T representa o período fundamental da estrutura, enquanto τ significa o tempo necessário para a carga percorrer toda a viga.

TABELA 3.3: Fator dinâmico de amplificação (F_{din})

T / τ	Este trabalho	Lin e Trethewey ¹⁰
0,1	1,049	1,053
0,5	1,262	1,252
1,0	1,706	1,705
1,234	1,735	1,730
1,5	1,705	1,704
2	1,551	1,550

Nesta análise considerou-se uma viga de doze elementos com as mesmas características do Item 3.2, sendo que o efeito do amortecimento estrutural foi desprezado, para possibilitar a comparação dos resultados obtidos.

Verifica-se que máxima discrepância entre os fatores dinâmicos de amplificação obtidos por este trabalho e os obtidos por Lin e Trethewey¹⁰, não excede 1%. Esta discrepância é perfeitamente aceitável, ainda mais se for levado em conta que os resultados apresentados na referência¹⁰, foram obtidos a partir de um modelo em elementos finitos cuja malha era composta por apenas quatro elementos de viga, e as equações relativas aos graus de liberdade de rotação ($\partial w / \partial x$) foram resolvidas estaticamente, para reduzir o tempo de processamento.

A Figura 3.8 apresenta o deslocamento vertical do nó central da viga para alguns parâmetros adimensionais de velocidade (T / τ). Nesta figura, o eixo das ordenadas corresponde ao deslocamento dinâmico do centro da viga dividido pelo máximo deslocamento

estático, enquanto o eixo das abscissas representa a coordenada adimensional de posição do carregamento. Nota-se que para baixas velocidades ($T/\tau = 0,1$), a resposta dinâmica da estrutura aproxima-se da solução estática.

Destaca-se que a carga só está em contato com a viga no intervalo $0 \leq x/L \leq 1$, portanto os deslocamentos em $x/L > 1$ correspondem à vibração livre da estrutura.

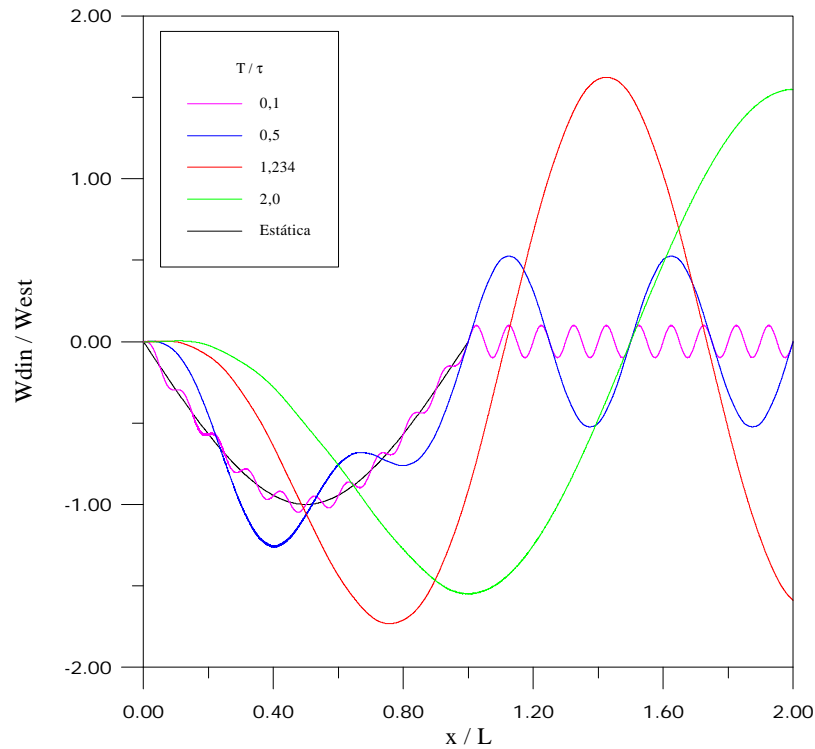


FIGURA 3.8: Deslocamento vertical do centro de uma viga em função da posição da carga

Observando a Tabela 3.3 e a Figura 3.8, pode-se constatar a presença de uma velocidade crítica, para a qual o deslocamento dinâmico apresenta um valor máximo. Este deslocamento dinâmico máximo foi identificado¹, a princípio, como sendo 50% maior que o deslocamento estático máximo ($F_{din} = 1,5$), e ocorria quando o tempo que a carga levava para atravessar a viga era metade do período fundamental ($T/\tau = 2,0$). Posteriormente, verificou-se³ que o fator dinâmico de amplificação poderia alcançar 1,738 quando o tempo do percurso fosse 0,81 vezes o período fundamental ($T/\tau = 1,234$).

Através da Figura 3.9 pode-se perceber a variação do fator dinâmico de amplificação a medida que a velocidade da carga é aumentada. Verifica-se que, desconsiderando o

amortecimento estrutural, o deslocamento dinâmico máximo no centro da viga pode chegar a ser 1,735 vezes maior que o deslocamento estático máximo, ocorrendo para $T / \tau = 1,234$. Porém, a inclusão de um amortecimento estrutural de apenas 5%, reduz não só o fator dinâmico de amplificação ($F_{din} = 1,613$), como diminui ligeiramente a velocidade crítica do carregamento ($T / \tau = 1,180$).

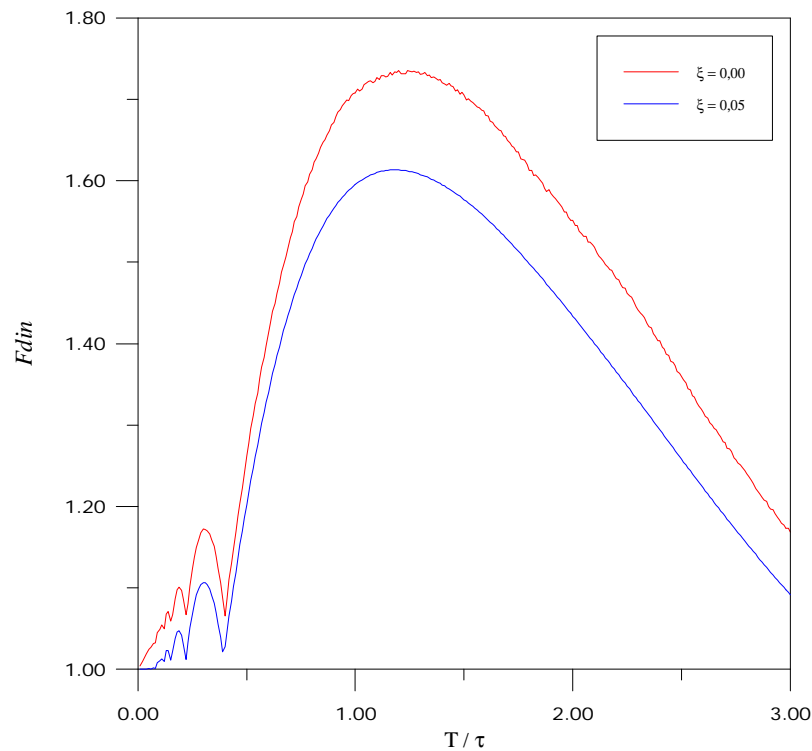


FIGURA 3.9: Fator dinâmico de amplificação para diferentes velocidades do carregamento

3.4 – VIGA SUBMETIDA A OSCILADOR MÓVEL

Apesar de alguns modelos^{8,10,27,34} terem sido propostos para representar a interação de uma estrutura com um subsistema móvel, conforme ilustrado na Figura 3.10, pouco se sabe realmente sobre o comportamento dinâmico de um sistema como este.

A técnica dos grafos de ligação tem se mostrado como uma alternativa apropriada quando se necessita analisar um sistema composto por subsistemas de naturezas distintas. Devido à sua característica modular, esta técnica permite que o modelo representativo de cada subsistema seja desenvolvido separadamente e, mediante o acoplamento destes modelos, torna-se possível a avaliação do comportamento global do sistema dinâmico.

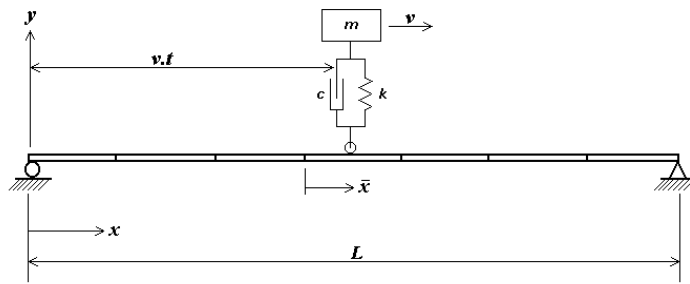


FIGURA 3.10: Viga bi-apoiada submetida a um oscilador móvel

O grafo de ligação proposto para a representação deste sistema é apresentado na Figura 3.11. Ao observar a figura verifica-se que o grafo utilizado para descrever o oscilador, é idêntico ao apresentado na Figura 2.7. Tal constatação enfatiza a versatilidade proporcionada por este procedimento generalizado.

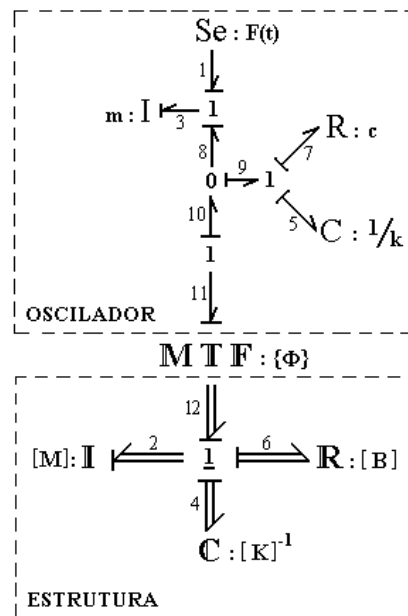


FIGURA 3.11: Grafo de ligação de uma estrutura que interage com um oscilador móvel

Por estar associado a grandezas vetoriais (\mathbf{p} e \mathbf{q} – vetor quantidade de movimento e vetor deslocamento) e utilizar o conceito de campos multiportas (\mathbf{I} , \mathbf{C} e \mathbf{R} – Campo Inercial, Campo Capacitivo e Campo Resistivo) , o grafo multiligação possibilita (ver Apêndice A) a obtenção de um modelo de estado compacto, como se verifica através da Equação 3.21.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_2 \\ \dot{\mathbf{p}}_3 \\ \dot{\mathbf{q}}_4 \\ \dot{\mathbf{q}}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -([\mathbf{B}] + \{\Phi\}c\{\Phi\}^T)[\mathbf{M}]^{-1} & \{\Phi\}\frac{c}{m} & -[\mathbf{K}] & -\{\Phi\}k \\ c\{\Phi\}^T[\mathbf{M}]^{-1} & -\frac{c}{m} & 0 & k \\ [\mathbf{M}]^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ \{\Phi\}^T[\mathbf{M}]^{-1} & -\frac{1}{m} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \\ \mathbf{q}_4 \\ \mathbf{q}_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [e_1] \quad (3.21)$$

Conforme mencionado anteriormente, o código computacional desenvolvido permite que se escolha o tipo de carregamento móvel atuante (ver fluxograma no Apêndice B). Assim, o modelo de estado representado pela Equação 3.21 pode ser facilmente simulado, ao se optar por um oscilador (massa – mola – amortecedor) para interagir com o subsistema estrutural.

Conduzindo a análise deste modelo de maneira semelhante à apresentada no Item 3.2 para uma carga constante, os resultados obtidos pelo código computacional foram confrontados com os resultados disponíveis na bibliografia.

As propriedades de cada subsistema, utilizadas para a comparação dos resultados, foram as mesmas propostas pela referência¹⁰: (1) Viga engastada em suas duas extremidades; $L = 1,1938 \text{ m}$; $b = 0,0342 \text{ m}$; $h = 0,1491 \text{ m}$; $\mathbf{r}_v = 2,9602 \times 10^3 \text{ Kg /m}^3$; $E = 104,79 \text{ GPa}$ e (2) Oscilador; $m = 9,0641 \text{ Kg}$; $k = 8,3459 \times 10^6 \text{ N /m}$; $c = 173,9517 \text{ N.s /m}$.

TABELA 3.4: Fator dinâmico de amplificação (F_{din})

T / τ	Este trabalho	Lin e Trethewey ¹⁰
0,1	1,017	1,028
0,5	1,245	1,206
1,0	1,548	1,533
1,5	1.459	1,460
2,0	1,281	1,307

Verifica-se que a máxima discrepância entre os resultados obtidos por este trabalho e pelos obtidos na referência¹⁰ está em torno de 3%, o que é perfeitamente aceitável, uma vez que, conforme mencionado anteriormente, Lin e Trethewey¹⁰ utilizaram apenas quatro elementos de viga, enquanto neste trabalho a estrutura foi modelada com doze elementos.

O deslocamento transversal do nó central da viga em função da posição do carregamento, é apresentado na Figura 3.12, para cada parâmetro adimensional de velocidade (T / τ) da Tabela 3.4.

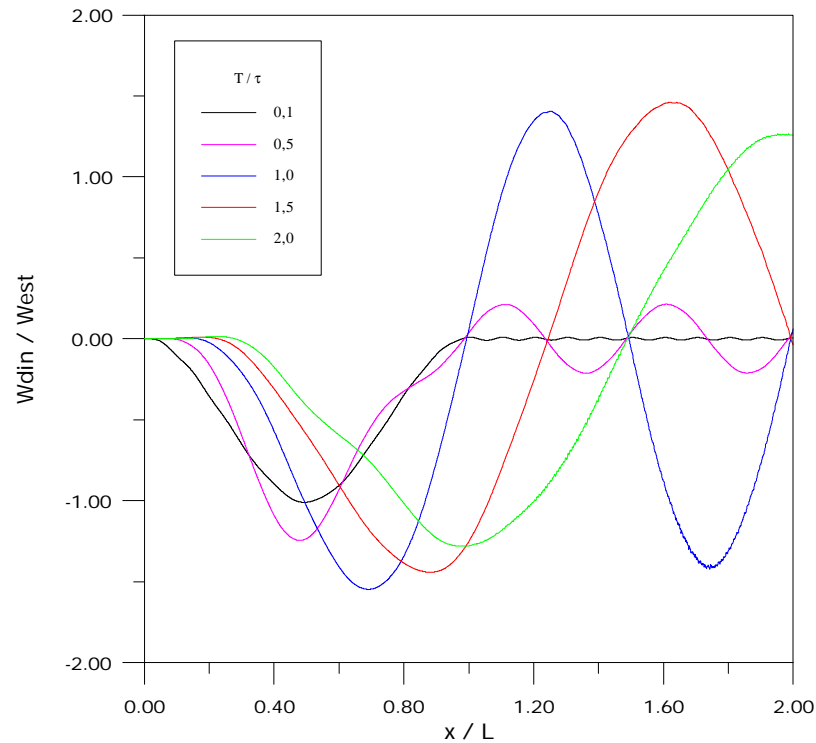


FIGURA 3.12: Deslocamento vertical do centro da viga em função da posição do oscilador

Outro parâmetro importante para a compreensão do comportamento dinâmico de uma estrutura que interage com um subsistema mecânico móvel, e que merece ser investigado, é o efeito da razão entre a massa do subsistema e a massa da estrutura.

A Figura 3.13 mostra a variação do fator dinâmico de amplificação em função da velocidade do carregamento para três diferentes parâmetros de massa (m/M_v – Massa do oscilador dividido pela massa da viga). Estes resultados foram obtidos para uma viga biapoiada de doze elementos com as mesmas características do Item 3.2.

É importante ressaltar que, ao variar a massa do subsistema para obter a razão m/M_v desejada, teve-se a precaução de manter constante a frequência natural do oscilador, a fim de que esta análise não sofresse a interferência de outro parâmetro. Pelo mesmo motivo não foi considerado o amortecimento da estrutura e nem do oscilador.

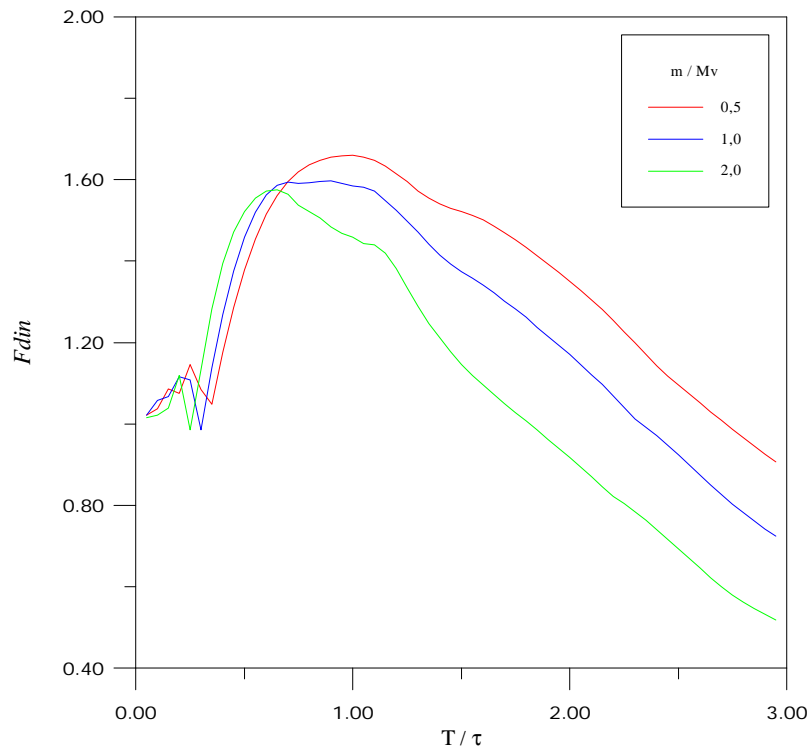


FIGURA 3.13: Fator dinâmico de amplificação

Ao observar a Figura 3.13 repara-se que, à medida que a razão m/M_v é aumentada, a velocidade crítica do sistema diminui, causando um desvio na curva do Fator Dinâmico de Amplificação.

Para uma velocidade pré-determinada, este desvio gera uma diferença no comportamento da estrutura. Considerando, por exemplo, a região acima da velocidade crítica (região supercrítica), verifica-se que o aumento da massa do oscilador acarreta uma diminuição do Fator Dinâmico de Amplificação. Porém, em grande parte da região abaixo da velocidade crítica (região subcrítica), acontece justamente o contrário, o Fator Dinâmico de Amplificação aumenta quando se aumenta a razão m/M_v .

Para tornar mais clara a visualização da influência que a massa do oscilador exerce sobre a resposta da estrutura, apresenta-se a seguir o deslocamento vertical dinâmico de uma viga para três diferentes parâmetros de massa. Pela Figura 3.14(a), verifica-se que, conforme mencionado anteriormente, para um carregamento com velocidade subcrítica, as maiores amplitudes de deslocamento ocorrem para os valores mais elevados de m/M_v . No entanto, para velocidades supercríticas, como mostra a Figura 3.14(b), observa-se exatamente o inverso.

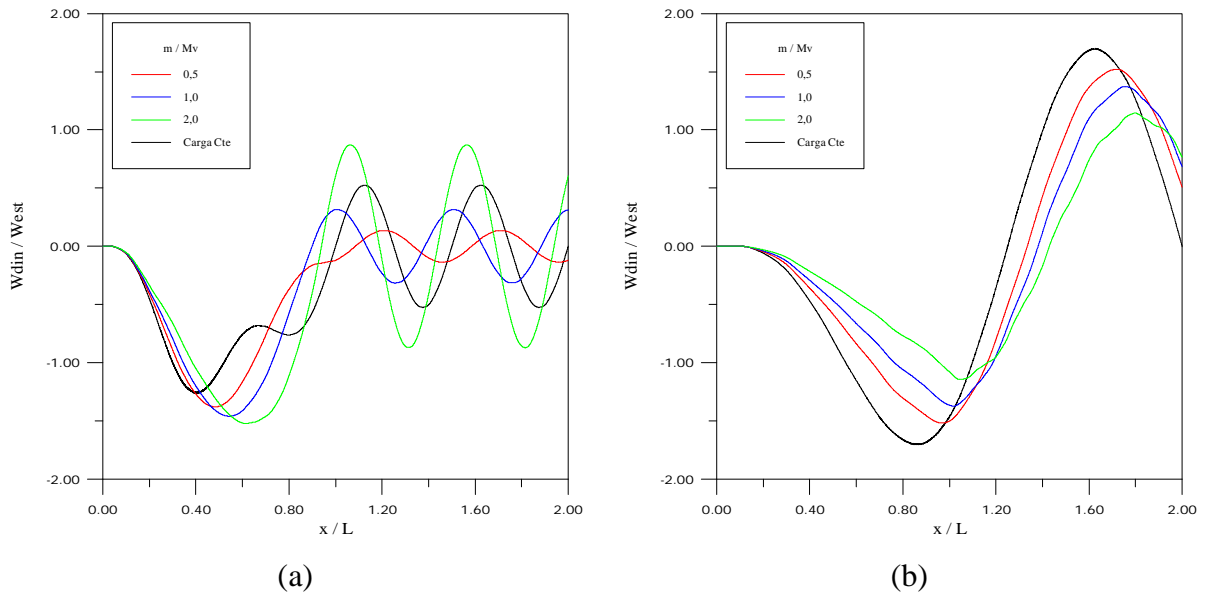


FIGURA 3.14: Deslocamento do centro da viga para: (a) $T/t = 0,5$ e (b) $T/t = 1,5$

Destaca-se que os gráficos relativos a uma carga constante foram incluídos na Figura 3.14, apenas para demonstrar que esta simplificação nem sempre representa adequadamente a realidade, e deve ser adotada somente quando a massa do subsistema representar uma pequena fração da massa da estrutura. Quando se necessita modelar a interação entre estruturas e veículos pesados, a dinâmica veicular precisa ser considerada.

Através do código computacional desenvolvido para a simulação deste procedimento pode-se, também, obter o comportamento das variáveis explicitamente no domínio do tempo.

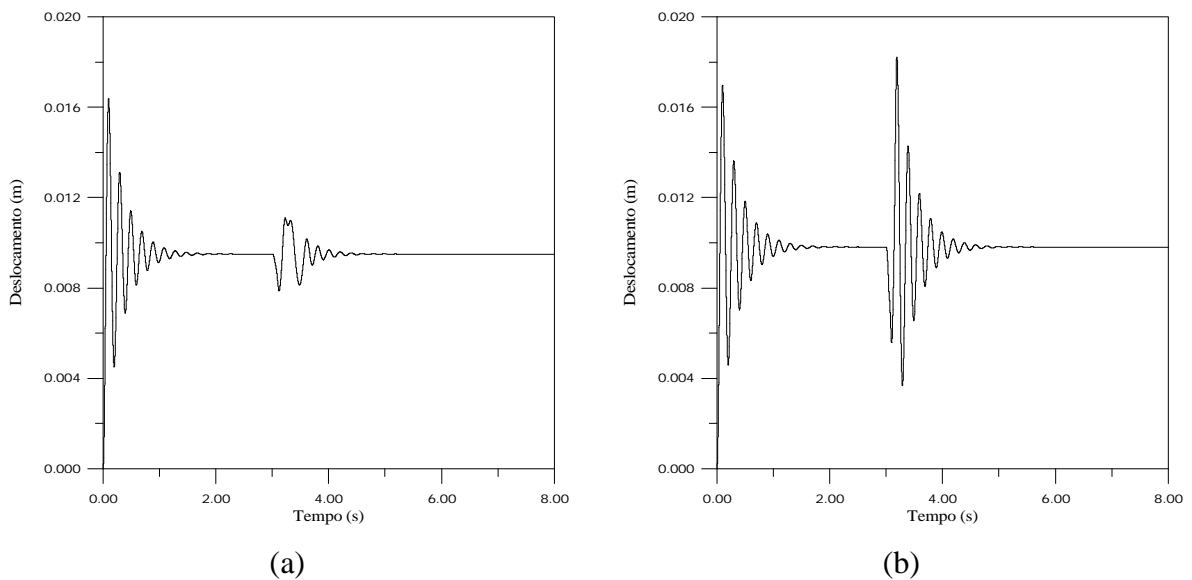


FIGURA 3.15: Deslocamento do oscilador para: (a) $T/t = 0,5$ e (b) $T/t = 1,5$

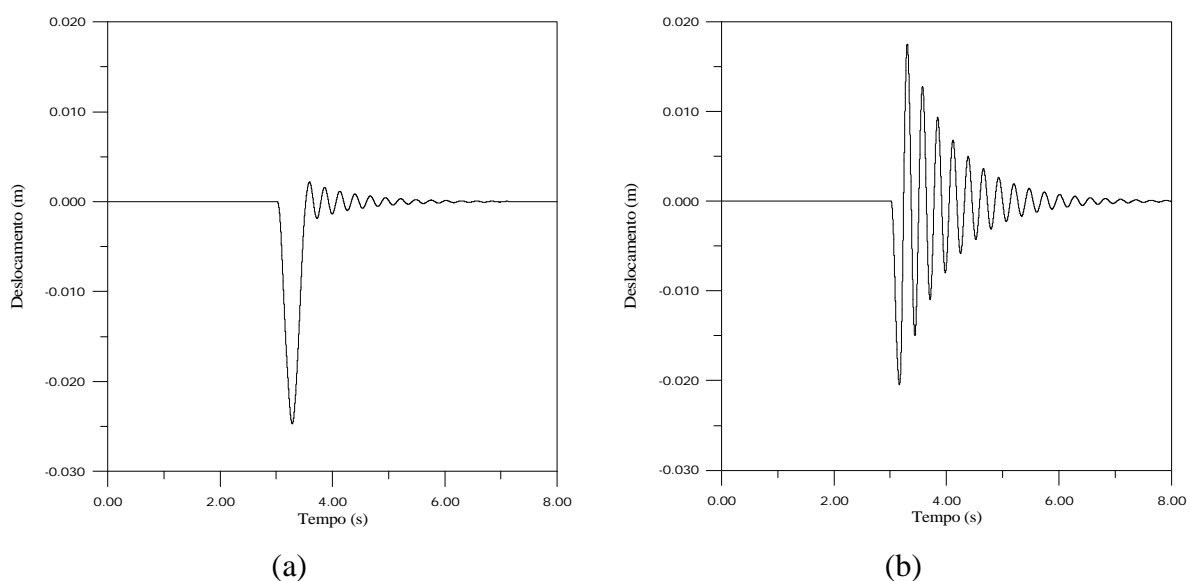


FIGURA 3.16: Deslocamento do centro da viga para: (a) $T/t = 0,5$ e (b) $T/t = 1,5$

As Figuras 3.15 e 3.16 mostram, respectivamente, o deslocamento do oscilador e o deslocamento vertical do nó central da viga. É interessante observar como em ambos os subsistemas, o comportamento dinâmico está intrinsicamente ligado a velocidade do carregamento.

Para obter a resposta dinâmica do modelo completo, nesta análise foram incorporados os efeitos de amortecimento do oscilador ($\mathbf{x}_{osc} = 10\%$) e da estrutura ($\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = 5\%$).

É importante lembrar que os resultados aqui discutidos limitaram-se a considerar um carregamento com velocidade constante. Porém, nada impede que a carga ou o oscilador assumam outros tipos de movimento.

Embora tenha-se analisado apenas vigas bi-apoiadas ou com engastes em ambas as extremidades, devido a versatilidade do método dos elementos finitos, este procedimento permite que vigas com as mais diversas condições de contorno, apresentando inclusive, apoios intermediários, possam ser analisadas. O código computacional apresentado no Apêndice B admite todas estas possibilidades.

CAPÍTULO 4

ANÁLISE DINÂMICA DE CARGAS MÓVEIS EM PLACAS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS REPRESENTADOS EM GRAFOS MULTILIGAÇÃO

4.1 – INTRODUÇÃO

A análise dinâmica do problema de cargas móveis em placas é de grande importância para algumas áreas da engenharia mecânica, civil e aeroespacial. Em boa parte dos casos, o carregamento pode ser representado por uma carga constante, concentrada ou linearmente distribuída.

Quando se deseja investigar a interação entre veículos e estruturas torna-se necessário, conforme demonstrado no Capítulo 3, o acoplamento de um subsistema mecânico que represente a dinâmica veicular. Esta necessidade esbarra na dificuldade de se obter um modelo matemático que caracterize corretamente o comportamento dos dois subsistemas (veículo e estrutura) interagindo entre si.

O procedimento utilizado no Capítulo 3 permite que qualquer estrutura, que possa ser previamente discretizada pelo método dos elementos finitos, tenha sua representação através da técnica dos grafos de ligação podendo, assim, ser facilmente acoplada a um outro subsistema modelado pela técnica.

Neste capítulo investiga-se o efeito de um carregamento móvel no comportamento dinâmico de uma placa. Como no caso de vigas (Capítulo 3) parte-se de um modelo simplificado, no qual o carregamento é representado por uma carga constante, e compara-se os resultados obtidos por este modelo com resultados apresentados na literatura. Estende-se esta metodologia para o caso de uma placa sendo submetida a um carregamento proveniente de um subsistema massa-mola-amortecedor e avalia-se a influência deste subsistema na resposta do modelo estrutural.

Para a obtenção das matrizes representativas do modelo estrutural, empregou-se a Teoria Clássica de Placas, também conhecida como Teoria de Placas de Kirchhoff, que baseia-se na hipótese de que qualquer linha perpendicular ao plano da placa, permanece reta e perpendicular a um plano tangente à superfície deformada. Discute-se também, a utilização de elementos com doze e dezesseis graus de liberdade em uma análise dinâmica.

4.2 – O MODELO ESTRUTURAL

Por se tratar de um procedimento generalizado, a metodologia de representação de modelos estruturais, via grafos multiligação proposta por Da Silva¹³, pode ser adotada para a obtenção das equações de estado, relativas ao modelo de placa.

Como esta metodologia utiliza as matrizes de massa $[M]$, de flexibilidade $[K]^{-1}$ e de amortecimento $[B]$, oriundas do método dos elementos finitos para caracterizar a estrutura, torna-se necessária a escolha do elemento a ser utilizado na discretização do domínio.

Considerando que a teoria clássica de placas pode ser entendida como uma extensão bidimensional à teoria de Benoulli-Euler para vigas, intuitivamente, sugere-se que o deslocamento transversal (w) e suas derivadas ($\partial w/\partial x, \partial w/\partial y$) constituam as variáveis primárias em cada nó.

O campo de deslocamentos $w(x, y, t)$ no domínio do elemento, pode ser interpolado através da Equação 4.1.

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \mathbf{f}_i^e(x, y) u_i^e(t) \quad (4.1)$$

onde $\mathbf{f}_i^e(x, y)$ são as funções de interpolação e $u_i^e(t)$ os graus de liberdade do elemento.

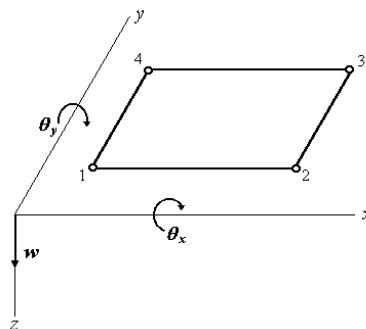


FIGURA 4.1: Elemento de placa

Para a determinação das funções de interpolação de um elemento de placa retangular, conforme apresentado na Figura 4.1, com quatro nós e três graus de liberdade por nó (w ,

$q_y = \partial w / \partial x$ e $q_x = w / \partial$), necessita-se de um polinômio de aproximação com doze termos, que pode ser obtido sistematicamente através do triângulo de Pascal (ver Figura 4.2).

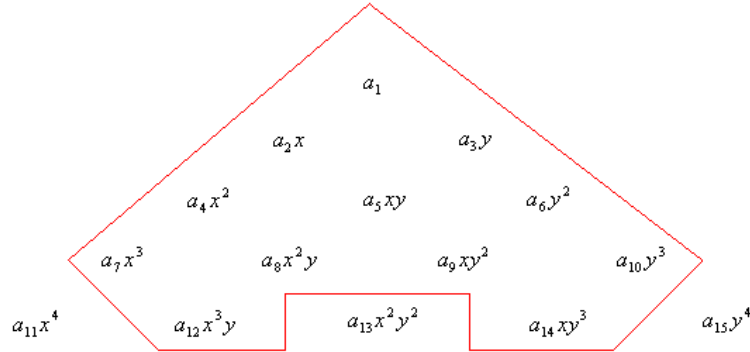


FIGURA 4.2: Polinômio de doze termos selecionado a partir do triângulo de Pascal

Observa-se que o polinômio selecionado não é um polinômio completo de quarta ordem (completo de terceira ordem + $a_{12}x^3y + a_{14}xy$), e que apesar de assegurar a continuidade do deslocamento transversal, o mesmo não ocorre para as suas respectivas derivadas em x e y .

Para confirmar esta observação, considerando, por exemplo, o lado 1 – 2 ($y = Cte.$) do elemento de placa apresentado na Figura 4.1, verifica-se que existem seis variáveis nodais ($w_1, w_2, \partial w_1 / \partial x, \partial w_2 / \partial x, \partial w_1 / \partial y$ e $\partial w_2 / \partial y$), através das quais define-se o campo de deslocamentos ao longo deste lado.

$$w = a_1 + a_2x + a_4x^2 + a_7x^3 \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = a_2 + 2a_4x + 3a_7x^2 \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = a_3 + a_5x + a_8x^2 + a_{12}x^3 \quad (4.4)$$

Como no modelo de vigas, quatro variáveis nodais ($w_1, w_2, \partial w_1 / \partial x$ e $\partial w_2 / \partial x$) são suficientes para definir corretamente a variação de w e $\partial w / \partial x$. No entanto, visto que $\partial w / \partial y$ varia segundo um polinômio de terceira ordem (Equação 4.4), e só há dois valores ($\partial w_1 / \partial y$ e

$\partial w_2/\partial y$) disponíveis na lateral 1 – bica não pode ser unicamente definida, violando a condição de continuidade para w/y . Por este motivo, $\partial^2 w/\partial x \partial y$ pode assumir valores distintos em um mesmo nó. Apesar desta deficiência, este elemento tem apresentado resultados satisfatórios^{31,35} para a análise estática do modelo de placa.

Outra alternativa é a adoção de um elemento retangular com quatro nós e quatro graus de liberdade por nó (w , $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$ e $\partial^2 w/\partial x \partial y$). As funções de interpolação para este elemento são obtidas a partir do produto das funções de Hermite unidimensionais (Equações 3.3 a 3.6) nas direções x e y , e atendem as condições de continuidade necessárias para todas as variáveis primárias.

Como as funções de interpolação destes dois elementos são obtidas para um elemento padrão de dimensão 2×2 e coordenadas \mathbf{x} e \mathbf{h} (ver Figura 4.3) deve-se, portanto, realizar a transformação das coordenadas físicas (x, y) para as coordenadas locais (\mathbf{x}, \mathbf{h}) deste elemento.

$$\mathbf{x} = (x - x_c)/(x_c - x_1) \qquad \mathbf{h} = (y - y_c)/(y_c - y_1) \qquad (4.5)$$

onde (x_c, y_c) e (x_1, y_1) são, respectivamente, as coordenadas do centro do elemento e do nó inferior esquerdo.

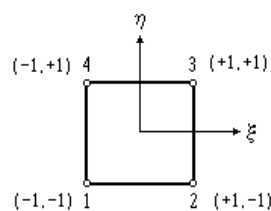


FIGURA 4.3: Elemento padrão

A Tabela 4.1 apresenta as funções de interpolação utilizadas para a aproximação da geometria do elemento³⁵ (Interpolação Bi-linear de Lagrange) e as funções de interpolação para a aproximação das variáveis primárias, tanto para o elemento com doze graus de liberdade (TCP-12) quanto para o elemento dezesseis graus de liberdade (TCP16).

TABELA 4.1: Funções de interpolação do elemento de placa

Funções de interpolação para a geometria		$\frac{1}{4}(1 + \mathbf{xx}_i)(1 + \mathbf{hh}_i)$
Funções de interpolação para as variáveis		
TCP – 12	$w \rightarrow$	$\frac{1}{8}(\mathbf{xx}_i + 1)^2(\mathbf{hh}_i + 1)(2 + \mathbf{xx}_i + \mathbf{hh}_i - \mathbf{x}^2 - \mathbf{h}^2)$
	$\frac{\partial w}{\partial \mathbf{x}} \rightarrow$	$\frac{1}{8} J_{11} \mathbf{x}_i (\mathbf{xx}_i + 1)^2 (\mathbf{xx}_i - 1) (\mathbf{hh}_i + 1)$
	$\frac{\partial w}{\partial \mathbf{h}} \rightarrow$	$\frac{1}{8} J_{22} \mathbf{x}_i (\mathbf{xx}_i + 1) (\mathbf{hh}_i + 1)^2 (\mathbf{hh}_i - 1)$
TCP – 16	$w \rightarrow$	$\frac{1}{16}(\mathbf{x} + \mathbf{x}_i)^2(\mathbf{xx}_i - 2)(\mathbf{h} + \mathbf{h}_i)^2(\mathbf{hh}_i - 2)$
	$\frac{\partial w}{\partial \mathbf{x}} \rightarrow$	$-\frac{1}{16} J_{11} \mathbf{x}_i (\mathbf{x} + \mathbf{x}_i)^2 (\mathbf{xx}_i - 1) (\mathbf{h} + \mathbf{h}_i)^2 (\mathbf{hh}_i - 2)$
	$\frac{\partial w}{\partial \mathbf{h}} \rightarrow$	$-\frac{1}{16} J_{22} \mathbf{h}_i (\mathbf{x} + \mathbf{x}_i)^2 (\mathbf{xx}_i - 2) (\mathbf{h} + \mathbf{h}_i)^2 (\mathbf{hh}_i - 1)$
	$\frac{\partial^2 w}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{h}} \rightarrow$	$\frac{1}{16} J \mathbf{x}_i \mathbf{h}_i (\mathbf{x} + \mathbf{x}_i)^2 (\mathbf{xx}_i - 1) (\mathbf{h} + \mathbf{h}_i)^2 (\mathbf{hh}_i - 1)$

onde \mathbf{x}_i e \mathbf{h}_i são as coordenadas do nó i do elemento padrão (ver Figura 4.3), J , J_{11} e J_{22} são, respectivamente, o determinante e os elementos da matriz jacobiana da transformação.

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial y}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial x}{\partial \mathbf{h}} & \frac{\partial y}{\partial \mathbf{h}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{y}_1^e}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial \mathbf{y}_2^e}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial \mathbf{y}_3^e}{\partial \mathbf{x}} & \frac{\partial \mathbf{y}_4^e}{\partial \mathbf{x}} \\ \frac{\partial \mathbf{y}_1^e}{\partial \mathbf{h}} & \frac{\partial \mathbf{y}_2^e}{\partial \mathbf{h}} & \frac{\partial \mathbf{y}_3^e}{\partial \mathbf{h}} & \frac{\partial \mathbf{y}_4^e}{\partial \mathbf{h}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

Como pode ser visto na Tabela 4.1, utiliza-se uma formulação subparamétrica, na qual as funções de interpolação para a aproximação da geometria do elemento são de ordem menor que as funções utilizadas para a aproximação das variáveis primárias. Assim, através da integração numérica de Gauss-Legendre³⁶, obtém-se as matrizes de massa e rigidez do elemento de placa³¹ (Ω_e).

$$K_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \left[D_x \frac{\partial^2 \mathbf{f}_i^e}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \mathbf{f}_j^e}{\partial x^2} + D_1 \left(\frac{\partial^2 \mathbf{f}_i^e}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \mathbf{f}_j^e}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{f}_j^e}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \mathbf{f}_i^e}{\partial y^2} \right) + D_y \frac{\partial^2 \mathbf{f}_i^e}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \mathbf{f}_j^e}{\partial y^2} + 4D_{xy} \frac{\partial^2 \mathbf{f}_i^e}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \mathbf{f}_j^e}{\partial x \partial y} \right] dx dy \quad (4.9)$$

$$M_{ij}^e = \int_{\Omega_e} \left[I_0 \mathbf{f}_i^e \mathbf{f}_j^e + I_2 \left(\frac{\partial \mathbf{f}_i^e}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{f}_j^e}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{f}_j^e}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{f}_i^e}{\partial y} \right) \right] dx dy \quad (4.8)$$

onde D_x , D_1 , D_y e D_{xy} representam a rigidez flexional de uma placa ortotrópica,

$$\begin{aligned} D_x &= \frac{E_1 h^3}{12(1 - \mathbf{n}_{12} \mathbf{n}_{21})}, & D_y &= \frac{E_2 h^3}{12(1 - \mathbf{n}_{12} \mathbf{n}_{21})}, \\ D_1 &= \frac{\mathbf{n}_{12} E_2 h^3}{12(1 - \mathbf{n}_{12} \mathbf{n}_{21})}, & D_{xy} &= \frac{1}{12} G_{12} h^3 \end{aligned} \quad (4.9)$$

enquanto $I_0 = \mathbf{r}_v h$ e $I_2 = \frac{1}{12} \mathbf{r}_v h^3$ são os momentos de inércia de massa.

Conforme mencionado no Capítulo 3, as matrizes globais utilizadas por este procedimento para a caracterização da estrutura são obtidas ao compatibilizar os esforços e deslocamentos referentes aos graus de liberdade do modelo. A matriz representativa do amortecimento estrutural pode ser definida pelas Equações 3.9, 3.10 e 3.11.

Assim, uma vez obtidas as matrizes características do subsistema estrutural, pode-se representá-lo pela técnica dos grafos de ligação o que permitirá, como no caso de vigas, seu acoplamento a outros subsistemas.

A Figura 4.4 apresenta uma placa simplesmente apoiada e submetida a uma carga $F(t)$, subitamente aplicada no centro da estrutura.

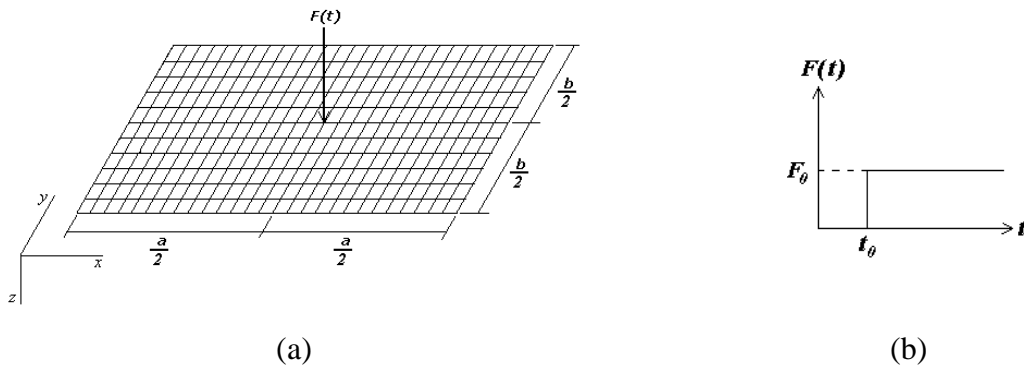


FIGURA 4.4: Placa simplesmente apoiada submetida a uma carga aplicada subitamente

O grafo de ligação e as equações de estado obtidos para este modelo físico (Figura 4.5 e Equação 3.17), são idênticos aos apresentados no Capítulo 3. No entanto neste caso as matrizes de massa $[M]$, flexibilidade $[K]^{-1}$ e amortecimento $[B]$ foram desenvolvidas para o modelo de placa.

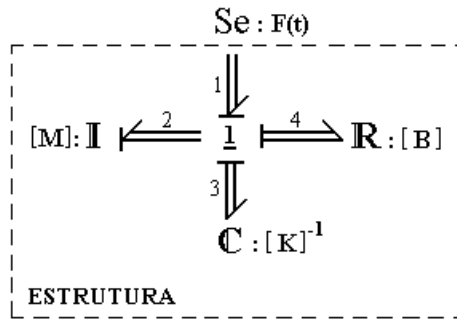


FIGURA 4.5: Grafo multiligação de uma estrutura com apenas uma fonte de esforço

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_2 \\ \dot{\mathbf{q}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[\mathbf{B}][\mathbf{M}]^{-1} & -[\mathbf{K}] \\ [\mathbf{M}]^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [\mathbf{I}] \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{e}_1 \quad (3.17)$$

De posse do modelo de estado, devidamente implementado através de um código computacional, pode-se determinar automaticamente o tipo (TCP-12 ou TCP-16 – Teoria Clássica de Placas com doze ou dezesseis graus de liberdade) e o número de elementos a serem utilizados na malha.

TABELA 4.2: Frequências naturais de uma placa simplesmente apoiada

Número de Elementos	Tipo de Elemento	$\mathbf{w}_1(\mathbf{w}_{11})$	$\mathbf{w}_2(\mathbf{w}_{12})$	$\mathbf{w}_3(\mathbf{w}_{21})$	$\mathbf{w}_4(\mathbf{w}_{22})$
4 (2×2)	TCP – 12	5034,271			
	TCP – 16	6194,745			
9 (3×3)	TCP – 12	5440,579	13873,627	14267,546	19304,685
	TCP – 16	6426,199	15893,218	15893,218	23482,970
16 (4×4)	TCP – 12	5617,030	14325,437	14569,683	20576,437
	TCP – 16	6454,765	16095,337	16095,337	25295,681
Solução Analítica		6467,181	16167,954	16167,954	25868,726

A Tabela 4.2 apresenta as frequências naturais de uma placa isotrópica com propriedades: $E = 206,84$ GPa, $\mathbf{r}_v = 10684$ kg /m³, $G = 79,56$ GPa, $\mathbf{n} = 0,3$ e dimensões: $a = b = 0,1016$ m e $h = 0,00254$ m, calculadas para diferentes tipos de malha.

Como já se esperava, verifica-se que o elemento TCP-16 converge muito mais rapidamente para a solução exata que o elemento TCP-12, permitindo que se utilize um modelo com menos elementos e, ainda assim, obtenha-se resultados com boa precisão. Este fato o torna mais apropriado para compor a malha que será utilizada na análise do comportamento dinâmico da estrutura, uma vez que proporciona menor tempo de processamento.

Considerando, então, uma malha composta por dezesseis elementos do tipo TCP-16, e que uma carga de 8,9 N seja aplicada subitamente no centro da placa, apresenta-se na Figura 4.6 o deslocamento transversal do nó central no domínio do tempo. As constantes de amortecimento proporcional (**a** e **b**), foram obtidas através das Equações 3.10 e 3.11, para $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = 5\%$.

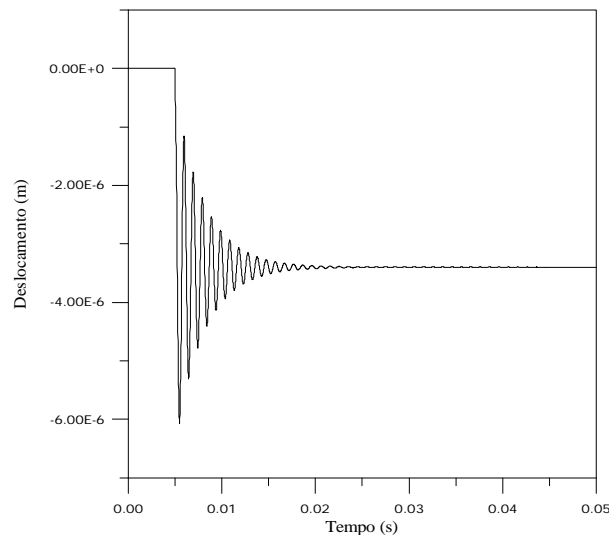


FIGURA 4.6: Deslocamento transversal do nó central da placa

Uma vez que o nó central de placa atinge a posição de equilíbrio estático, pode-se comparar este resultado com o deslocamento estático analítico, obtido³⁷ pela da Equação 4.9 para uma placa isotrópica quadrada.

$$W_{est} = -0,01160 \frac{F_0 a^2}{D_E} \quad (4.10)$$

TABELA 4.3: Comparação entre os deslocamentos analítico e numérico

Equilíbrio Estático do Nó Central (16 elementos TCP-12)	$-4,502 \times 10^{-6} \text{ m}$
Equilíbrio Estático do Nó Central (16 elementos TCP - 16)	$-3,400 \times 10^{-6} \text{ m}$
Deslocamento Estático Analítico (W_{est})	$-3,433 \times 10^{-6} \text{ m}$

Confrontando os resultados apresentados na Tabela 4.3 pode-se, mais uma vez, verificar a maior eficiência do elemento TCP - 16, sendo este, portanto, o elemento adotado para compor a malha que será utilizada para representar a estrutura no problema de cargas móveis.

4.3 – PLACA SUBMETIDA A UMA CARGA MÓVEL CONSTANTE

A determinação da resposta de uma placa sob a ação de um carregamento móvel é de grande interesse para a engenharia. Seu campo de aplicações envolve o estudo do comportamento da fuselagem de aeronaves, e análise da interação entre veículos e estruturas. Para investigar esta classe de problemas parte-se de um modelo mais simplificado no qual emprega-se uma carga concentrada movendo-se com velocidade constante ao longo de uma trajetória plana pré-estabelecida, conforme apresentado na Figura 4.7.

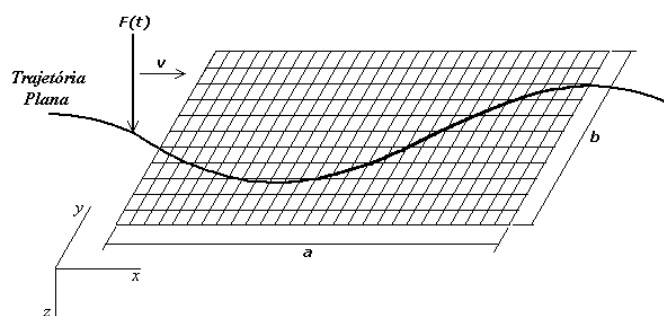


FIGURA 4.7: Placa simplesmente apoiada submetida a uma carga móvel

Devido a característica generalizada da técnica dos grafos de ligação, e a versatilidade do método dos elementos finitos, pode-se representar este sistema utilizando o mesmo grafo de ligação desenvolvido para o modelo de viga Figura 4.8.

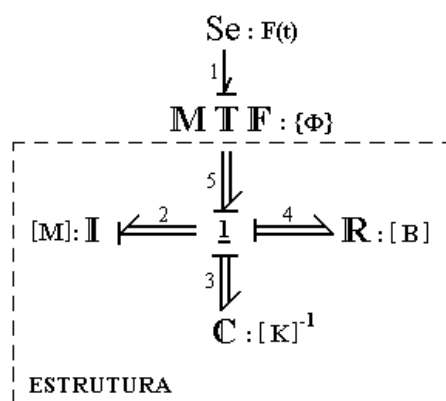


FIGURA 4.8: Grafo de ligação de uma estrutura submetida a uma carga móvel

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_2 \\ \dot{\mathbf{q}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[\mathbf{B}][\mathbf{M}]^{-1} & -[\mathbf{K}] \\ [\mathbf{M}]^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \{\Phi\} \\ 0 \end{bmatrix} [e_1] \quad (3.19)$$

A Equação 3.19, aqui repetida, representa o modelo de estado associado ao grafo da Figura 4.8. Neste caso, é importante lembrar que, assim como as matrizes representativas do modelo estrutural, o módulo do multitransformador $\{\Phi\}$ também deve ser obtido adequadamente para o modelo de placa através das funções de interpolação das variáveis, apresentadas na Tabela 4.1.

Conforme mencionado no Capítulo 3, o multitransformador ($\mathbf{M T F}$) é responsável pela representação do carregamento nos pontos situados no interior do elemento. Assim, conhecendo as componentes (\mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2) da velocidade nos eixos x e y , pode-se calcular a posição do carregamento em qualquer instante (t) e, deste modo, determinar o vetor $\{\Phi\}$.

Através do código computacional discutido no Apêndice B, pode-se obter alguns resultados de simulação para este modelo matemático. Na Tabela 4.4, apresenta-se o Fator dinâmico de amplificação (F_{din}) de uma placa isotrópica simplesmente apoiada, sendo submetida a uma carga de 8,9 N, com diferentes parâmetros adimensionais de velocidade.

Para esta simulação, a placa foi modelada com dezesseis elementos do tipo TCP-16 e com as mesmas propriedades consideradas no Item 4.2. É importante ressaltar, que estas foram as mesmas propriedades utilizadas na referência¹². Considerou-se uma trajetória retilínea para a carga, paralela ao lado a da placa, e que passava pelo centro desta estrutura.

TABELA 4.4: Fator dinâmico de amplificação (F_{din})

T / τ	Este trabalho	Taheri e Ting ¹²
0,125	1,040	1,045
0,250	1,109	1,090
0,500	1,242	1,256
1,000	1,573	1,566
2,000	1,383	1,409

O deslocamento transversal do nó central da placa, associado a cada parâmetro adimensional de velocidade (T/t) da Tabela 4.4, é apresentado na Figura 4.9 em função da posição do carregamento. Nesta figura, o eixo das ordenadas corresponde ao deslocamento dinâmico do centro da viga dividido pelo máximo deslocamento estático, enquanto o eixo das abscissas representa a coordenada adimensional de posição do carregamento.

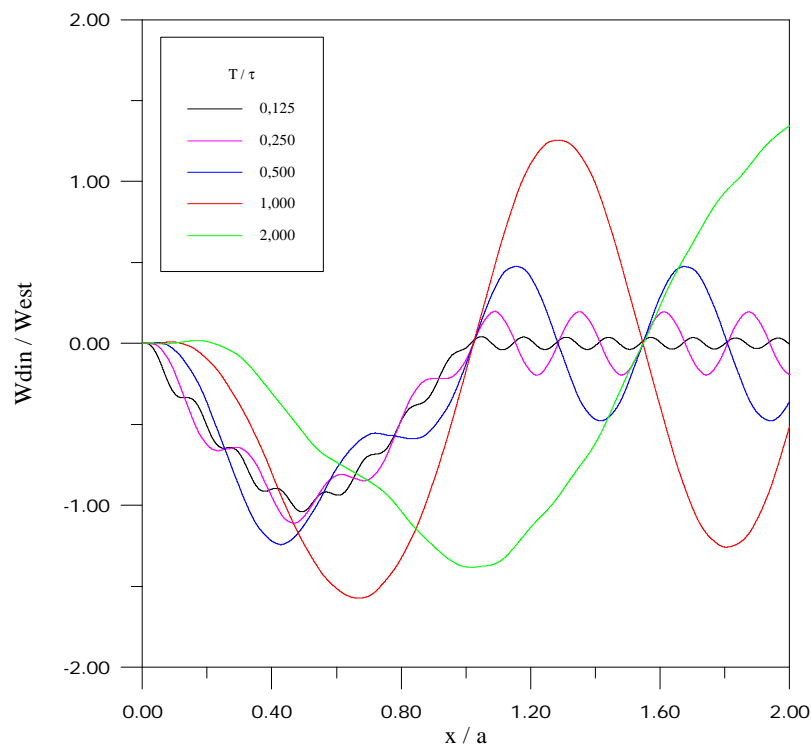


FIGURA 4.9: Deslocamento vertical do centro da placa em função da posição da carga

Confrontando os fatores dinâmicos de amplificação (F_{din}) calculados, com os resultados obtidos na referência¹², verifica-se que a discrepância máxima entre estes valores não alcança 2%. Em seu trabalho, Taheri e Ting¹² também modelaram a estrutura pelo método dos elementos finitos, porém as equações correspondentes aos graus de liberdade de rotação ($\partial w/\partial x, \partial w/\partial y$) foram resolvidas estaticamente. Outra diferença observada entre este trabalho e a referência¹², diz respeito ao passo de integração utilizado. Enquanto Taheri e Ting¹² usaram apenas 25 passos, para o mesmo intervalo de tempo neste trabalho foram considerados de 5.000 a 35.000 passos, dependendo da velocidade do carregamento.

4.4 – PLACA SUBMETIDA A UM OSCILADOR MÓVEL

A abordagem do problema de cargas móveis em placas, através de uma metodologia clássica, pode representar um grande desafio quando o carregamento móvel é proveniente de um subsistema mecânico, como por exemplo, no modelo físico ilustrado na Figura 4.10.

A técnica dos grafos de ligação supera esta dificuldade pois permite que um sistema complexo seja dividido em subsistemas mais simples, que podem ser posteriormente acoplados para a obtenção do modelo matemático representativo do sistema global.

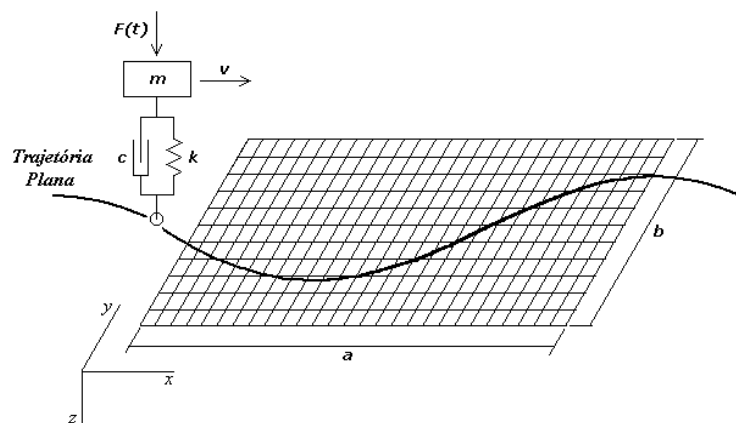


FIGURA 4.10: Placa simplesmente apoiada submetida a um oscilador móvel

Mais uma vez, o grafo de ligação e as equações de estado (Figura 4.11 e Equação 3.21) utilizados para a representação deste sistema, são idênticos aos apresentados no Capítulo 3 para a modelagem da interação entre uma viga e um oscilador. Este fato, por si só, reitera a versatilidade proporcionada por este procedimento generalizado.

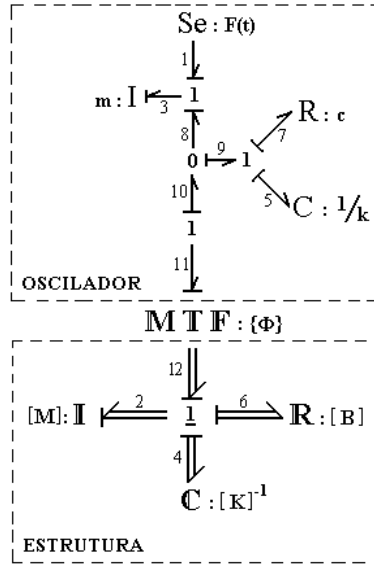


FIGURA 4.11: Grafo de ligação de uma estrutura que interage com um oscilador móvel

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_2 \\ \dot{\mathbf{p}}_3 \\ \dot{\mathbf{q}}_4 \\ \dot{\mathbf{q}}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -([\mathbf{B}] + \{\Phi\}c\{\Phi\}^T)[\mathbf{M}]^{-1} & \{\Phi\} \frac{c}{m} & -[\mathbf{K}] & -\{\Phi\}k \\ c\{\Phi\}^T[\mathbf{M}]^{-1} & -\frac{c}{m} & 0 & k \\ [\mathbf{M}]^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ \{\Phi\}^T[\mathbf{M}]^{-1} & -\frac{1}{m} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \\ \mathbf{q}_4 \\ \mathbf{q}_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [e_1] \quad (3.21)$$

A Tabela 4.5 apresenta os Fatores dinâmicos de amplificação (F_{din}) obtidos pela simulação deste modelo de estado, para o caso de um oscilador interagindo com uma placa de aço simplesmente apoiada.

TABELA 4.5: Fator dinâmico de amplificação

T / τ	F_{din}
0,125	0,993
0,250	1,075
0,500	1,235
1,000	1,420
2,000	1,017

Nesta simulação, foi considerada uma placa de dimensões: $a = b = 1\text{ m}$ e $h = 0,001\text{ m}$, discretizada por uma malha com dezesseis elementos do tipo TCP-16. Para o oscilador, a massa (m) e a rigidez (k) foram escolhidas, de modo que se obtivesse uma razão $m/M_p = 0,125$ e uma frequência natural (ω) de $38,73\text{ rad / s}$, enquanto sua trajetória foi definida ao longo de uma linha reta, paralela ao lado a da placa, e que passava pelo centro desta estrutura.

Apresenta-se na Figura 4.12, o deslocamento transversal do nó central da placa em função da posição do oscilador, relativo a cada parâmetro adimensional de velocidade (T/t) da Tabela 4.5. Destaca-se que a carga só está em contato com a placa no intervalo $0 \leq x/a \leq 1$, portanto os deslocamentos em $x/a > 1$ correspondem à vibração livre da estrutura

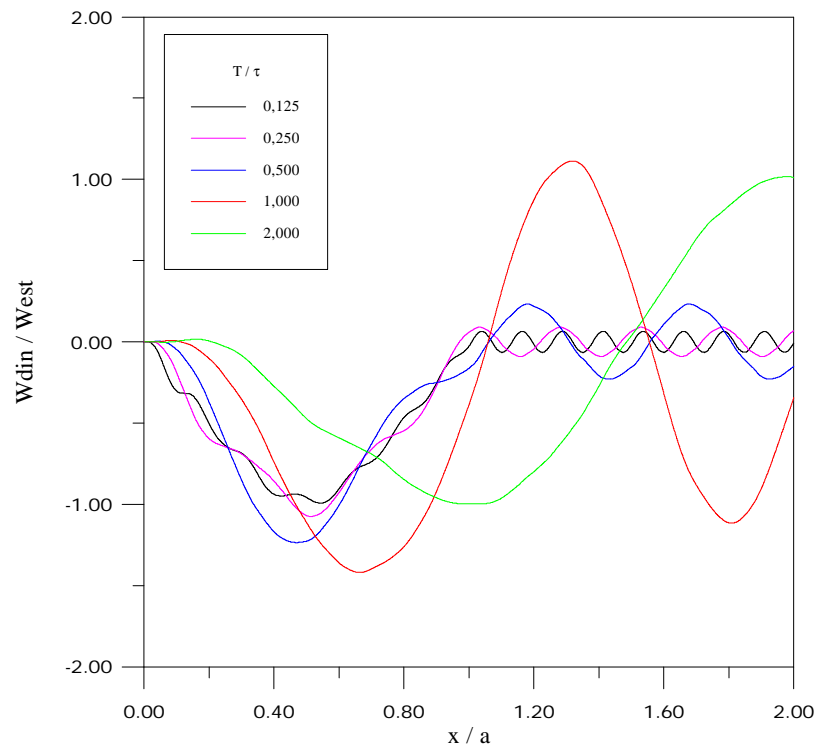


FIGURA 4.12: Deslocamento vertical do centro da placa em função da posição do oscilador

Observando os resultados apresentados nas Tabelas 4.4 e 4.5, nota-se que para cada sistema analisado, existe uma determinada velocidade do carregamento na qual a estrutura apresenta suas maiores amplitudes de deslocamento. Este comportamento já era esperado, por analogia ao modelo de viga.

A Figura 4.13 mostra a variação do fator dinâmico de amplificação (F_{din}) em função da velocidade desenvolvida pelo carregamento, tanto para uma carga constante, quanto para um oscilador. Através destes resultados pode-se constatar que, para uma carga simples, o deslocamento dinâmico transversal do centro da placa pode chegar a ser 1,575 vezes maior que deslocamento estático máximo (Equação 4.10), quando o tempo necessário para a carga atravessar a placa for igual ao seu período fundamental ($T/t = 1,0$).

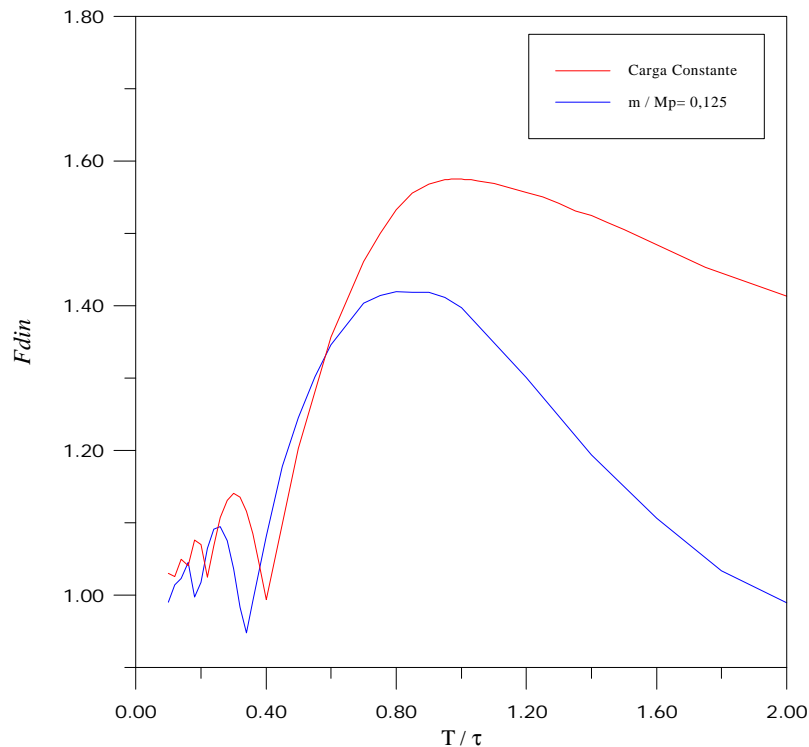


FIGURA 4.13: Fator dinâmico de amplificação para diferentes velocidades do carregamento

Outra informação relevante que pode ser extraída deste gráfico diz respeito à influência exercida pela massa do subsistema mecânico na resposta da estrutura. Observa-se que ao considerar um carregamento proveniente de um subsistema mecânico, a inércia deste subsistema acarreta um desvio na curva do Fator Dinâmico de Amplificação. É interessante notar que para uma velocidade pré-determinada este desvio causa uma diferença no comportamento da estrutura. Considerando, por exemplo, a região acima da velocidade crítica, verifica-se as maiores amplitudes de deslocamento ocorrem para o modelo com a carga constante, enquanto que em grande parte da região abaixo da velocidade crítica, as maiores amplitudes acontecem para o modelo com o oscilador.

Como se verificou no Capítulo 3 (para o caso de uma viga Bernoulli-Euler), de acordo com a velocidade do carregamento, a placa apresenta uma resposta diferente ao aumento da massa do oscilador.

Esta observação torna-se mais visível quando se examina, na Figura 4.14, o comportamento dinâmico da placa, para três diferentes parâmetros de massa (m/M_p).

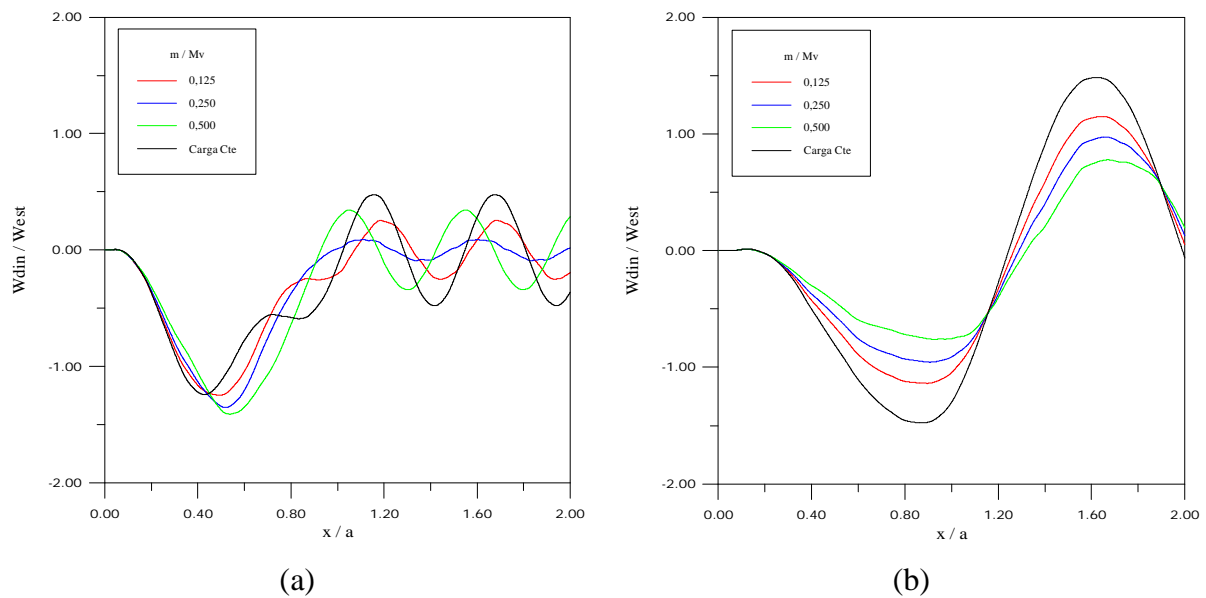


FIGURA 4.14: Deslocamento vertical do centro da placa em função da posição do oscilador para: (a) $T/t = 0,5$ e (b) $T/t = 1,5$

Pela Figura 4.14(a) verifica-se que, caso o oscilador esteja se movendo com uma velocidade abaixo da velocidade crítica, o deslocamento transversal apresenta suas maiores amplitudes, para os valores mais elevados de m/M_p . Por outro lado, para velocidades supercríticas, como pode ser visto na Figura 4.14(b), ocorre justamente o contrário. À medida que a massa do oscilador é aumentada, a amplitude do deslocamento da estrutura diminui.

A Figura 4.15 mostra a configuração deformada do sistema dinâmico completo, em quatro instantes distintos. Para ressaltar que qualquer trajetória pode facilmente ser atribuída ao carregamento, nesta simulação, foi definida uma trajetória retílinea, na qual o oscilador movia-se sobre uma das diagonais da placa. Através desta figura pode-se observar a interação dinâmica entre os dois subsistemas.

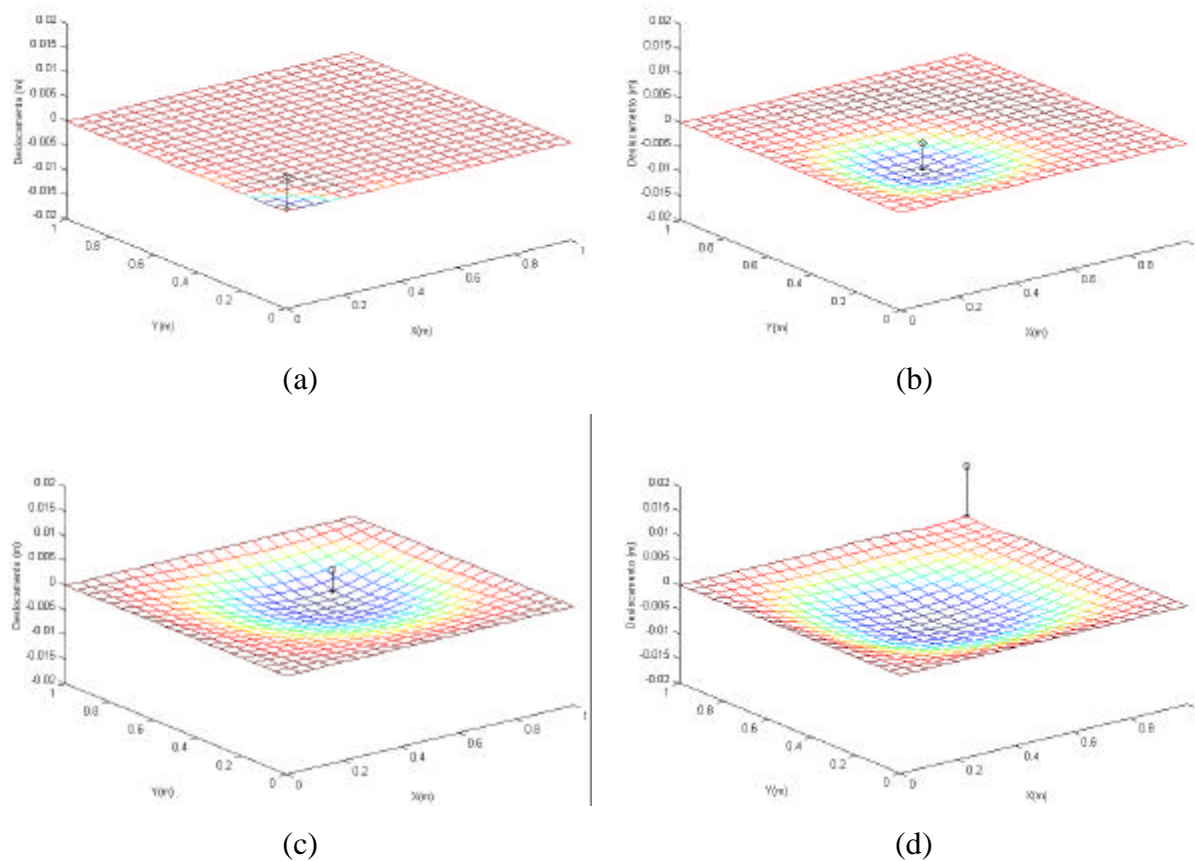


FIGURA 4.15: Configuração deformada do sistema em instantes diferentes

Ao observar a figura, pode-se constatar a variação do deslocamento vertical de ambos os subsistemas (oscilador e estrutura). Estes resultados de simulação destacam a importância de se utilizar um modelo matemático que considere o comportamento global do sistema.

CAPÍTULO 5

APLICAÇÕES DO PROBLEMA DE CARGAS MÓVEIS – INTERAÇÃO DINÂMICA ENTRE VEÍCULO E ESTRUTURA

5.1 – INTRODUÇÃO

Dentre as aplicações do problema de cargas móveis, a análise da interação entre veículo e estrutura constitui um dos maiores desafios enfrentados. As dificuldades estão na necessidade de se considerar em um mesmo modelo, subsistemas de natureza distinta, interagindo entre si.

Por se tratar de um assunto de grande relevância para a engenharia, esforços tem sido realizados com o intuito de se dar um tratamento matemático mais aprimorado, a fim de que sistemas mais sofisticados, e que representem melhor a realidade, possam ser estudados.

Ao unir a eficácia do método dos elementos finitos na representação de modelos estruturais, à versatilidade e modularidade da técnica dos grafos de ligação, o procedimento proposto por Da Silva¹³ permite incorporar ao modelo estruturas com as mais diversas condições de contorno e veículos com diferentes graus de complexidade.

Apresenta-se a seguir os modelos desenvolvidos especificamente, para duas aplicações do problema de interação veículo – estrutura. Ressalta-se, através destes modelos, as vantagens de se utilizar um procedimento generalizado e modular na representação de um sistema mais complexo.

São apresentados alguns resultados de simulação obtidos a partir do código computacional discutido no Apêndice B. Ainda que a intenção seja de apenas apresentar o modelo o matemático, as propriedades dos subsistemas utilizadas nas simulações, basearam-se em valores disponíveis na literatura.

5.2 – INTERAÇÃO TREM – FERROVIA

O fenômeno da interação entre trens e ferrovias possui uma série de questões que ainda não foram resolvidas. Um dos principais problemas encontrados consiste na deterioração dos trilhos devido a passagem de vagões de trens. Portanto, a melhor

compreensão do comportamento dinâmico deste sistema (ver Figura 5.1), pode significar uma redução nos custos de manutenção de uma ferrovia.

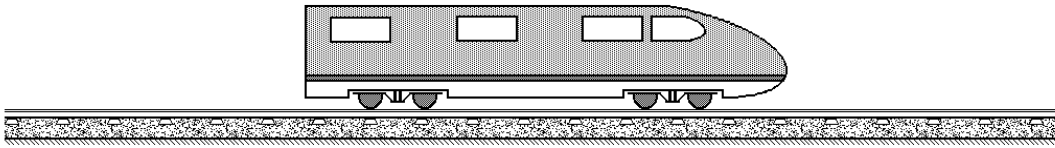


FIGURA 5.1: Trem movendo-se sobre uma ferrovia

Para representar corretamente este sistema dinâmico é de extrema importância que seja considerada a influência do terreno no qual os trilhos estejam apoiados. Como pode ser observado na Figura 5.2, o modelo físico proposto consiste em um sistema massa – mola – amortecedor, deslocando-se com uma velocidade constante, sobre uma viga simplesmente apoiada em uma fundação elástica.

A fundação elástica, utilizada para representar o terreno, foi modelada como sendo uma série de molas (k_f) e amortecedores (c_f) linearmente distribuídos ao longo de toda o comprimento da viga.

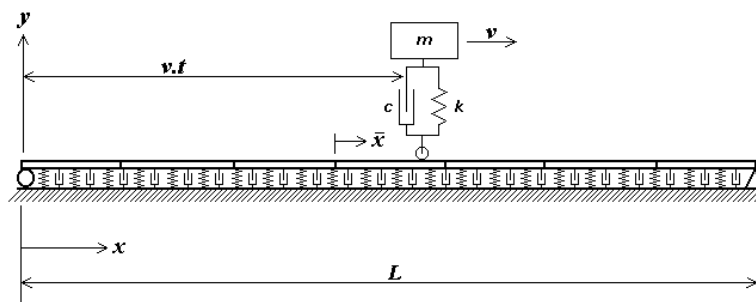


FIGURA 5.2: Modelo físico do sistema

Deste modo, as matrizes características deste modelo estrutural, podem ser obtidas através da simples adição das matrizes do elemento de viga Bernoulli-Euler (K_{ij}^v e B_{ij}^v), com as matrizes relativas à fundação elástica (K_{ij}^f e B_{ij}^f).

$$K_{ij}^e = K_{ij}^v + K_{ij}^f \quad (5.1)$$

$$B_{ij}^e = B_{ij}^v + B_{ij}^f \quad (5.2)$$

onde,

$$K_{ij}^f = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \mathbf{f}_i^e k_f \mathbf{f}_j^e dx \quad (5.3)$$

$$B_{ij}^f = \int_{x_e}^{x_{e+1}} \mathbf{f}_i^e c_f \mathbf{f}_j^e dx \quad (5.4)$$

As funções de interpolação \mathbf{f}_i^e são apresentadas nas Equações 3.3, 3.4, 3.5 e 3.6.

Destaca-se que, como não existe nenhum efeito inercial associado à fundação elástica, a matriz elementar de massa permanece idêntica à matriz de massa do elemento de viga Bernoulli-Euler.

Assim, definidas as matrizes de massa [M], de rigidez [K] e de amortecimento [B] do subsistema estrutural, pode-se representá-lo através da técnica dos grafos de ligação, o que possibilita seu acoplamento ao subsistema massa – mola – amortecedor, responsável pela modelagem da dinâmica vertical do vagão de um trem. Então, através dos procedimentos da técnica dos grafos de ligação, apresentados no Apêndice A, obtém-se o grafo de ligação e o modelo de estado (Figura 5.3 e Equação 3.21), propostos para representar a interação entre estes dois subsistemas.

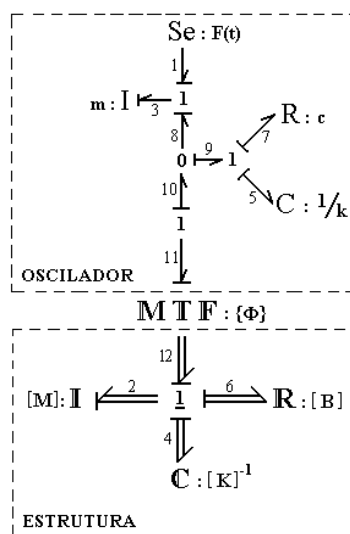


FIGURA 5.3: Grafo de ligação de uma estrutura que interage com um oscilador móvel

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_2 \\ \dot{\mathbf{p}}_3 \\ \dot{\mathbf{q}}_4 \\ \dot{\mathbf{q}}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -([\mathbf{B}] + \{\Phi\}c\{\Phi\}^T)[\mathbf{M}]^{-1} & \{\Phi\}\frac{c}{m} & -[\mathbf{K}] & -\{\Phi\}k \\ c\{\Phi\}^T[\mathbf{M}]^{-1} & -\frac{c}{m} & 0 & k \\ [\mathbf{M}]^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ \{\Phi\}^T[\mathbf{M}]^{-1} & -\frac{1}{m} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \\ \mathbf{q}_4 \\ \mathbf{q}_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [e_1] \quad (3.21)$$

Finalmente, para apresentar alguns resultados de simulação, que ilustrem o comportamento do trilho e do vagão interagindo entre si, considerou-se um sistema com as seguintes propriedades: (1) Trilho de aço de 500 m, com uma seção reta de 10 cm de largura por 10 cm de altura e $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = 5\%$; (2) Fundação elástica com rigidez $k_f = 4 \times 10^7 \text{ N/m}^2$ e amortecimento $c_f = 1,5 \times 10^4 \text{ N.s/m}^2$; (3) Vagão com $m = 40.000 \text{ kg}$, $k = 6 \times 10^7 \text{ N/m}$ e $c = 4 \times 10^5 \text{ N.s/m}$.

A Figura 5.4 mostra o deslocamento dinâmico do trilho modelado com 20 elementos, submetido a um vagão com velocidade constante de 50 m/s.

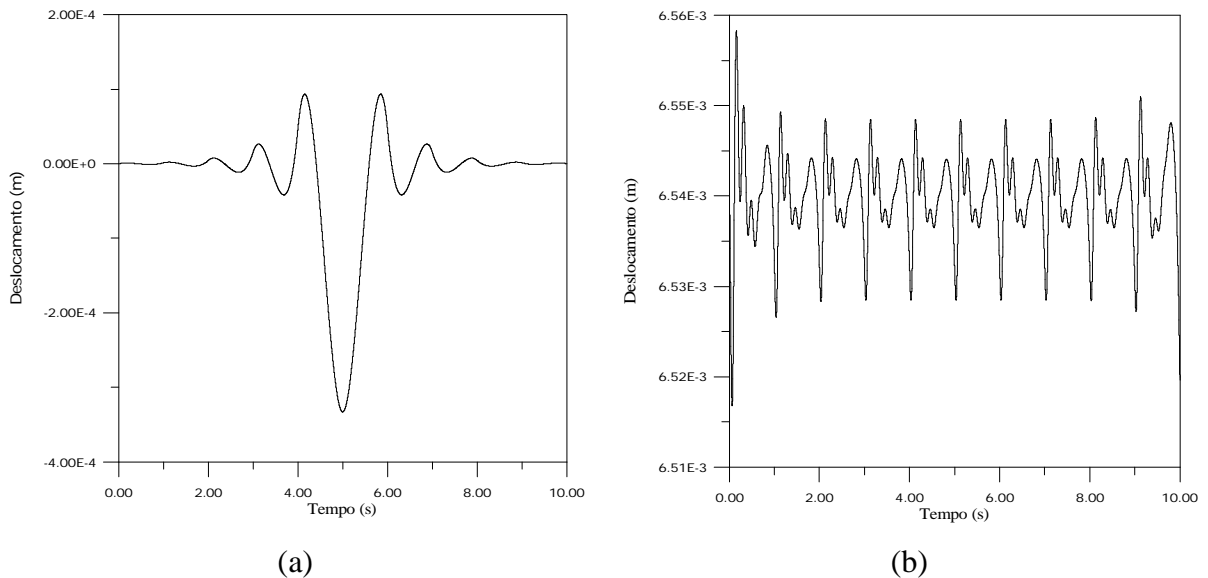
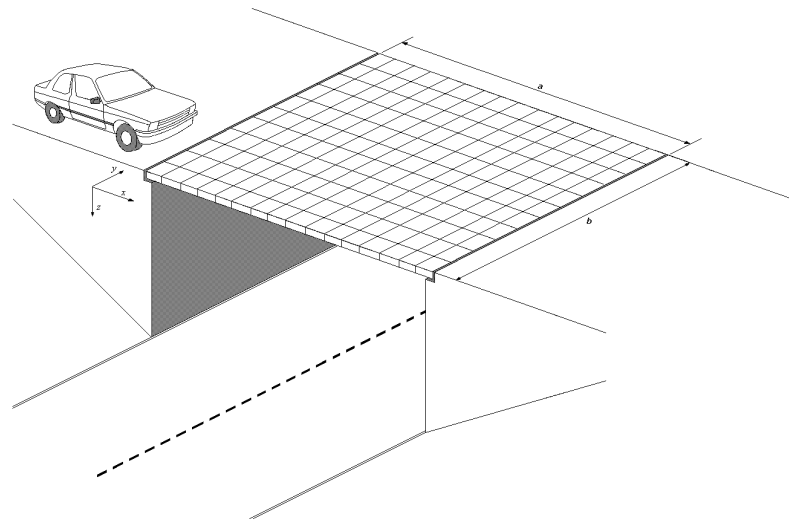


FIGURA 5.4: Deslocamento vertical: (a) do trilho em $x = L/2$ e (b) do vagão

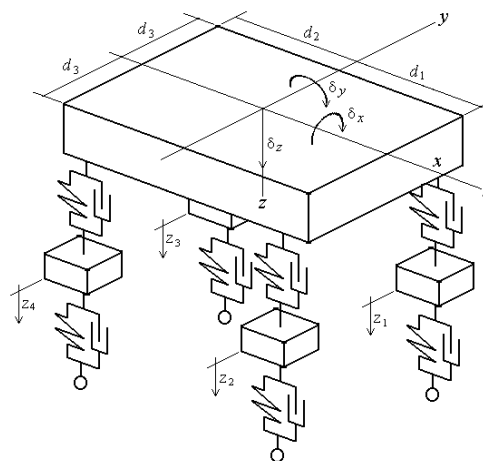
Devido à rigidez e ao amortecimento da fundação elástica, observa-se que os maiores deslocamentos do trilho ocorrem no ponto de contato com o vagão.

5.3 – INTERAÇÃO CARRO – PONTE

A técnica dos grafos de ligação tem se mostrado eficaz na solução de sistemas que envolvam solicitações dinâmicas, inclusive quando há interação entre subsistemas com elevado grau de complexidade. Assim, esta técnica torna-se perfeitamente aplicável à modelagem da interação entre um veículo e uma ponte, como apresentado na Figura 5.5.



(a)



(b)

FIGURA 5.5: Modelo físico dos subsistemas: (a) estrutura e (b) veículo

O modelo físico proposto para representar este sistema consiste de um veículo, modelado com sete graus de liberdade, que trafega sobre uma ponte (placa apoiada por dois

lados opostos), discretizada pelo método dos elementos finitos e representada pela técnica dos grafos de ligação, conforme realizado no Capítulo 4.

Devido a modularidade da técnica de modelagem utilizada, o modelo dinâmico global pode ser obtido através do acoplamento dos grafos desenvolvidos, isoladamente, para cada subsistema. Deste modo, o grafo multiligação representativo do sistema completo é apresentado na Figura 5.6.

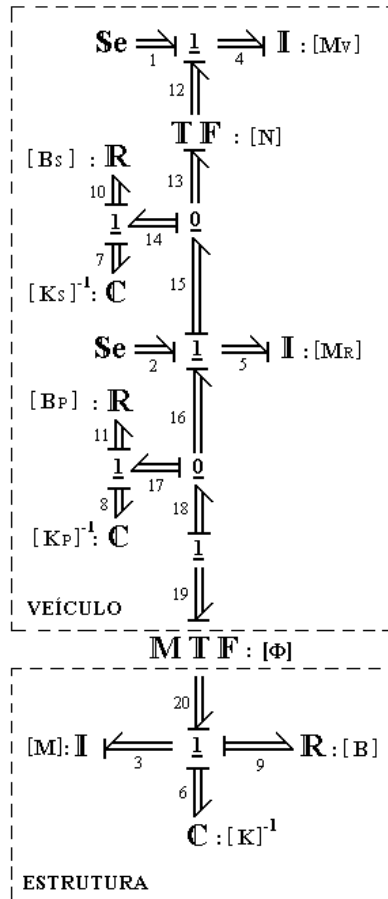


FIGURA 5.6: Grafo multiligação de uma estrutura que interage com um veículo

A partir deste grafo, pode-se determinar as equações de estado do modelo, aqui escritas na sua forma matricial (Equações 2.10 e 2.11), em função das variáveis de estado (X) e do vetor de entradas (U).

$$\dot{X} = AX + BU \quad (2.10)$$

$$Y = CX + DU \quad (2.11)$$

Neste caso, os vetores X , U e Y , e as matrizes A , B , C e D , presentes no modelo de estado, podem ser expressos por:

$$X = [\mathbf{p}_3 \quad \mathbf{p}_4 \quad \mathbf{p}_5 \quad \mathbf{q}_6 \quad \mathbf{q}_7 \quad \mathbf{q}_8]^T \quad (5.5)$$

$$U = [\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2]^T \quad (5.6)$$

$$Y = [\mathbf{f}_4] \quad (5.7)$$

$$A = \begin{bmatrix} -([\mathbf{B}] + [\Phi][\mathbf{B}_p][\Phi]^T)[\mathbf{M}]^{-1} & 0 & [\Phi][\mathbf{B}_p][\mathbf{M}_R]^{-1} & -[\mathbf{K}] & 0 & -[\Phi][\mathbf{K}_p] \\ 0 & -[\mathbf{N}][\mathbf{B}_s][\mathbf{N}]^T[\mathbf{M}_v]^{-1} & [\mathbf{N}][\mathbf{B}_s][\mathbf{M}_R]^{-1} & 0 & [\mathbf{N}][\mathbf{K}_s] & 0 \\ [\mathbf{B}_p][\Phi]^T[\mathbf{M}]^{-1} & [\mathbf{B}_s][\mathbf{N}]^T[\mathbf{M}_v]^{-1} & -([\mathbf{B}_p] + [\mathbf{B}_s])[\mathbf{M}_R]^{-1} & 0 & -[\mathbf{K}_s] & [\mathbf{K}_p] \\ [\mathbf{M}]^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -[\mathbf{N}]^T[\mathbf{M}_v]^{-1} & [\mathbf{M}_R]^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ [\Phi]^T[\mathbf{M}]^{-1} & 0 & -[\mathbf{M}_R]^{-1} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & [\mathbf{I}] & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [\mathbf{I}] & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (5.9)$$

$$C = [0 \quad [\mathbf{M}_v]^{-1} \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (5.10)$$

$$D = [0] \quad (5.11)$$

onde $[\mathbf{N}]$ e $[\Phi]$ são os módulos dos transformadores, expressos por:

$$[\mathbf{N}] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ d_3 & -d_3 & d_3 & -d_3 \\ d_1 & d_1 & -d_2 & -d_2 \end{bmatrix}; \quad [\Phi] = [\{\Phi\}_1 \quad \{\Phi\}_2 \quad \{\Phi\}_3 \quad \{\Phi\}_4] \quad (5.12)$$

Os elementos $\{\Phi\}_n$ da matriz $[\Phi]$, são os vetores responsáveis pela representação de cada roda do veículo, nos pontos de contato situados no interior do elemento de placa. Estes vetores são definidos, a cada instante de tempo, a partir das funções de interpolação, apresentadas na Tabela 4.1.

Destaca-se, que para modelar o veículo, foram adotadas algumas propriedades características da área de dinâmica veicular e foram extraídas da bibliografia disponível. A matriz $[\mathbf{M}_v]$, por exemplo, contém as inércias referentes ao deslocamento vertical (m) e aos deslocamentos angulares (I_x e I_y) do veículo, ao passo que a matriz $[\mathbf{M}_R]$, representa a massa de cada roda²⁹.

$$[\mathbf{M}_V] = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & I_x & 0 \\ 0 & 0 & I_y \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{M}_R] = \begin{bmatrix} M_R^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_R^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_R^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_R^4 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$

As propriedades de rigidez e amortecimento da suspensão e do pneu, foram incorporadas ao modelo, através das matrizes²⁹:

$$[\mathbf{K}_S] = \begin{bmatrix} K_S^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_S^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_S^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_S^4 \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{B}_S] = \begin{bmatrix} B_S^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_S^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_S^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_S^4 \end{bmatrix}; \quad (5.14)$$

$$[\mathbf{K}_P] = \begin{bmatrix} K_P^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_P^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_P^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_P^4 \end{bmatrix}; \quad [\mathbf{B}_P] = \begin{bmatrix} B_P^1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_P^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_P^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & B_P^4 \end{bmatrix}$$

Procurando simular o comportamento dinâmico deste sistema, considerou-se um veículo trafegando com uma velocidade constante de 20 m/s, sobre uma ponte representada por uma placa apoiada por dois lados opostos (ver Figura 5.7). As propriedades de cada subsistema são apresentadas na Tabela 5.1.

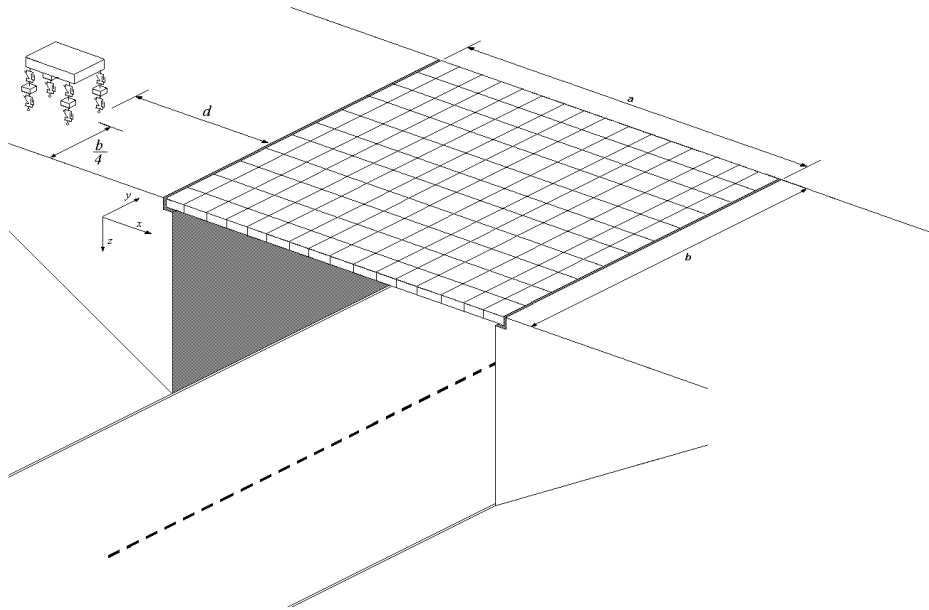


FIGURA 5.7: Trajetória do veículo durante a simulação

TABELA 5.1: Propriedades do sistema

Veículo	Placa
$m = 1100 \text{ kg}$	16 elementos TCP-16
$I_x = 700 \text{ kg.m}^2$	$a = 4 \text{ m}$
$I_y = 1.800 \text{ kg.m}^2$	$b = 10 \text{ m}$
$K_s^1 = K_s^2 = 10.000 \text{ N/m}$	$h = 0,1 \text{ m}$
$K_s^3 = K_s^4 = 9.000 \text{ N/m}$	$d = 240 \text{ m}$
$B_s^1 = B_s^2 = 500 \text{ N.s/m}$	$E = 24 \text{ GPa}$
$B_s^3 = B_s^4 = 450 \text{ N.s/m}$	$G = 10 \text{ GPa}$
$K_p = 200.000 \text{ N/m}$	$r_v = 2.300 \text{ kg/m}^3$
$B_p = 50 \text{ N.s/m}$	$n = 0,15$
$d_1 = 1 \text{ m}$	$x_1 = x_2 = 5\%$
$d_2 = 1,8 \text{ m}$	
$d_3 = 1,4 \text{ m}$	

Deste modo, através dos resultados de simulação, pode-se mostrar a interação dinâmica entre os dois subsistemas, e verificar a influência que um exerce sobre o outro.

A Figura 5.8, por exemplo, mostra o deslocamento vertical no domínio do tempo, do ponto central da ponte.

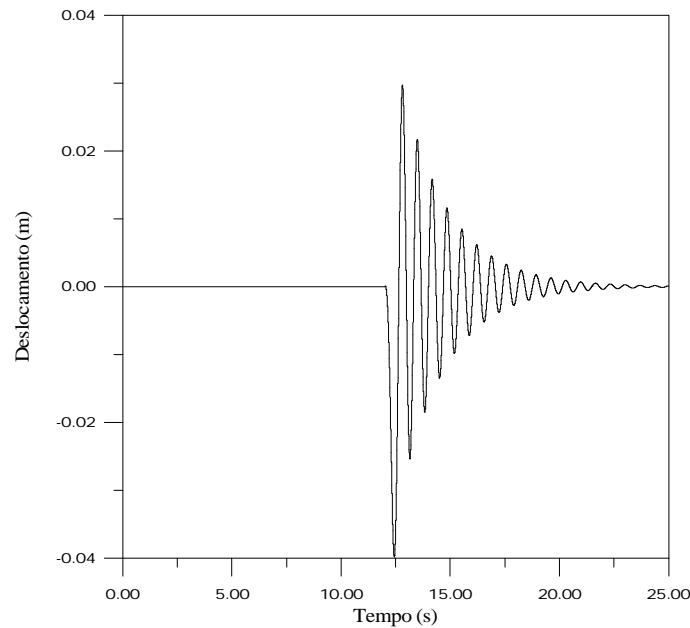


FIGURA 5.8: Deslocamento vertical da ponte em $x = a/2$ e $y = b/2$

Para o veículo, apresenta-se na Figura 5.9, as velocidades relacionadas ao movimento vertical (Bounce).

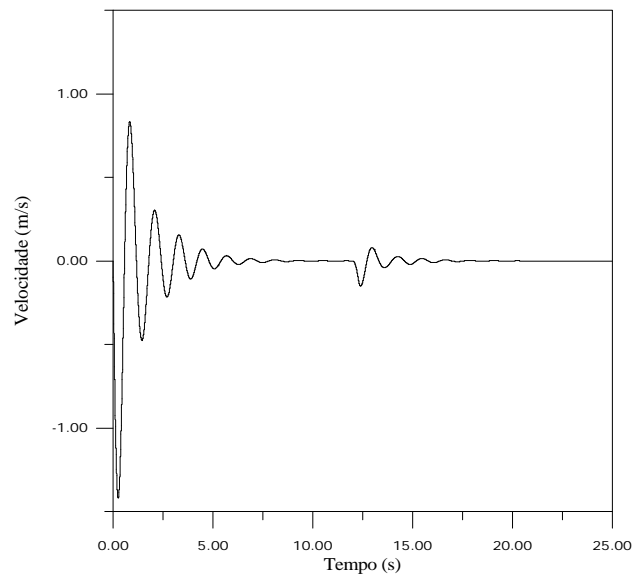
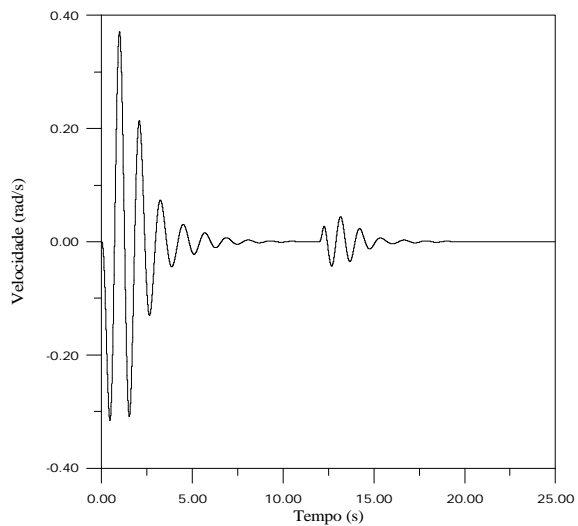
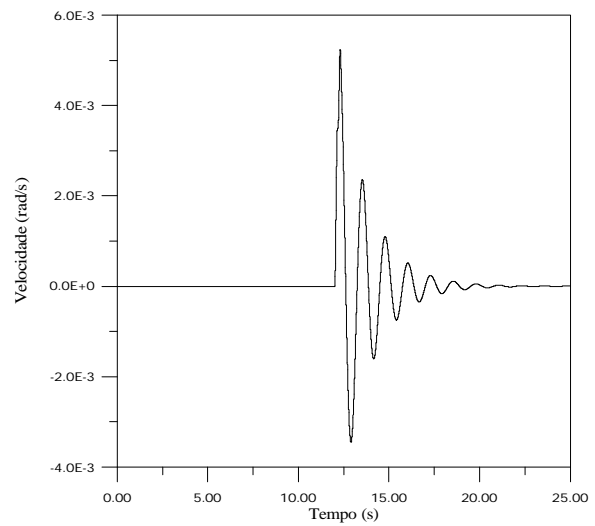


FIGURA 5.9: Velocidades relacionadas ao movimento vertical do veículo (\dot{d}_z)

Por fim, as velocidades relacionadas aos movimentos angulares em y e x , (Pitch e Roll, respectivamente), são apresentadas na Figura 5.10.



(a)



(b)

FIGURA 5.10: Velocidades dos movimentos angulares do veículo: (a) \dot{d}_y e (b) \dot{d}_x

Ressalta-se que outros resultados, podem facilmente ser obtidos através do código computacional desenvolvido.

Para o veículo, por exemplo, pode-se avaliar a variação dos esforços, das acelerações, das velocidades e dos deslocamentos, relativos a cada um de seus componentes (molas, amortecedores e inércias). Estes resultados podem ser de grande valia para a análise da dinâmica veicular e do conforto do passageiro.

Para a estrutura, além dos deslocamentos associados a cada grau de liberdade, poderia se explorar os esforços, as deformações e as tensões atuantes.

CAPÍTULO 6

CONCLUSÕES E SUGESTÕES

O recente aumento do número de trabalhos publicados por pesquisadores, de diversas áreas da engenharia, sobre o problema de cargas móveis, demonstra a grande relevância desta classe de problemas, e a necessidade da obtenção de modelos matemáticos que permitam a representação de sistemas com diferentes níveis de complexidade.

Através de uma formulação simples, porém eficaz, abordou-se no Capítulo 2, a modelagem da interação entre estruturas e subsistemas mecânicos em movimento, para os casos em que se conheça a solução homogênea da equação diferencial parcial de governo. Ainda que esta metodologia tenha proporcionado bons resultados a um baixo custo computacional, sua utilização é limitada a subsistemas estruturais com condições de contorno simples, que possibilitem a determinação analítica de seus modos de vibrar e frequências naturais.

Estas dificuldades foram superadas com a utilização do procedimento proposto por Da Silva¹³. Por empregar o conceito de campos multiportas, este procedimento permite que as matrizes de massa, de rigidez e de amortecimento, oriundas do método dos elementos finitos, sejam utilizadas para a caracterização do subsistema estrutural. Assim, ao unir as vantagens do método dos elementos finitos, à versatilidade e modularidade da técnica dos grafos de ligação, diversos modelos estruturais, interagindo com subsistemas mecânicos que apresentem diferentes graus de complexidade podem ser estudados .

Uma análise do comportamento dinâmico de uma viga submetida a um carregamento móvel, utilizando o procedimento proposto por Da Silva¹³, foi apresentada no Capítulo 3. Verificou-se, através dos resultados obtidos, que o comportamento do sistema está diretamente relacionado com a velocidade desenvolvida pelo carregamento, identificando, inclusive, a presença de uma velocidade crítica, para a qual o subsistema estrutural apresenta suas maiores amplitudes de deslocamento.

Para uma carga simples, movendo-se a uma velocidade constante sobre uma viga biapoiada, o deslocamento dinâmico máximo foi identificado como sendo 73,5% maior que o deslocamento estático máximo ($F_{\text{din}} = 1,735$), e ocorria quando o tempo que a carga levava para atravessar a viga era 0,81 vezes o período fundamental ($T / \tau = 1,234$).

Considerando que o carregamento atuante tenha sido proveniente de um subsistema massa-mola-amortecedor, investigou-se a influência que a massa do subsistema exerce sobre a resposta da estrutura. Deste modo, foi constatado que para velocidades subcríticas, o aumento da massa do oscilador proporciona uma maior amplitude no deslocamento dinâmico da viga, ao passo que para velocidades supercríticas, ocorre justamente o contrário.

Verificou-se, também, que o carregamento só deve ser aproximado por uma carga simples, quando a massa do subsistema for desprezível, se comparada com a massa da estrutura. Portanto, para a análise da interação entre estruturas e veículos pesados, a dinâmica veicular precisa ser considerada.

No Capítulo 4, foi abordada a análise dinâmica do problema de cargas móveis em placas. Como já era esperado, por analogia ao modelo de viga, pôde-se observar que o deslocamento dinâmico transversal de uma placa simplesmente apoiada, sujeita a uma carga simples, deslocando-se com uma velocidade constante, em uma trajetória paralela a um de seus lados, pode chegar a ser 1,575 vezes maior que deslocamento estático máximo, quando o tempo necessário para a carga atravessar a placa for igual ao seu período fundamental ($T/t = 1,0$).

Discutiu-se, também, a utilização de elementos de placa com doze e dezesseis graus de liberdade, para a construção da malha. Destaca-se que o elemento TCP-16 proporciona uma convergência muito mais rápida para a solução exata que o elemento TCP-12, permitindo que se obtenha uma boa precisão com poucos elementos. Esta característica, particularmente, o torna mais apropriado para a análise do comportamento dinâmico da placa, pois com um menor número de elementos consegue-se uma redução no tempo de processamento.

É importante lembrar que os resultados mostrados no Capítulo 5 são de caráter acadêmico, e foram apresentados apenas para ressaltar as inúmeras possibilidades proporcionadas por este procedimento de modelagem.

Isto não impede, porém, que sejam extraídos outros resultados do modelo matemático, inclusive considerando dados mais realísticos para o modelo. Uma investigação interessante, e que merece uma maior atenção, é a análise das velocidades críticas do veículo, tanto sob o ponto de vista estrutural (conforme realizado nos Capítulos 3 e 4), quanto em relação ao conforto do passageiro.

No que diz respeito ao desenvolvimento de futuros trabalhos, destaca-se a importância de se considerar, o efeito do cisalhamento e da inércia rotacional, através das teorias de Timoshenko e Mindlin, para os casos de vigas e placas espessas, não considerados neste

trabalho. Seria interessante, também, comparar as velocidades críticas obtidas através destas duas teorias, com os resultados apresentados neste trabalho.

Devido a característica multidisciplinar e modular da técnica dos grafos de ligação, pode-se, através deste procedimento, construir um modelo no qual esteja presente um sistema de controle, que possibilite a redução das amplitudes críticas de deslocamento da estrutura.

Outra importante contribuição, seria a utilização de um critério de redução de ordem para o modelo estrutural, o que permitiria uma diminuição significativa no tempo de processamento.

APÊNDICE A

GRAFOS DE LIGAÇÃO

A técnica dos grafos de ligação tem se mostrado uma excelente opção para a modelagem de sistemas dinâmicos complexos e que envolvam, inclusive, subsistemas de natureza física distinta, interagindo entre si. Devido sua característica modular, esta técnica permite que o grafo representativo do sistema completo, seja obtido a partir do acoplamento dos grafos de cada subsistema, desenvolvidos separadamente.

A essência desta técnica consiste na transferência de potência, através dos componentes de um determinado sistema. A potência instantânea, fluindo de um componente para o outro, através das ligações do grafo, pode ser expressa por:

$$P(t) = e(t) f(t) \quad (\text{A.1})$$

onde e e f representam o esforço e o fluxo associados a um dado elemento, e são conhecidos como variáveis de potência.

Além das variáveis de potência, a quantidade de movimento p e o deslocamento q , ou variáveis de energia, representam um importante papel na descrição do comportamento dinâmico de um sistema físico.

$$p(t) = \int e(t) dt \quad (\text{A.2})$$

$$q(t) = \int f(t) dt \quad (\text{A.3})$$

A Tabela A.1 apresenta as variáveis de potência e energia para alguns domínios físicos²⁹, que já tiveram sua representação através da técnica dos grafos de ligação.

O fluxo de potência entre dois subsistemas ou componentes de um sistema dinâmico pode ser representado graficamente por uma meia seta. A presença de uma barra vertical (barra causal) em uma das extremidades da meia seta, indica o sentido atribuído à variável de esforço.

TABELA A.1: Domínio físico e variáveis de potência e energia

Domínio Físico	Esforço e	Fluxo f	Qtd. de Movimento p	Deslocamento q
Mecânico Translação	Força (N)	Velocidade (m/s)	Qtd. de Movimento (N.s)	Posição (m)
Mecânico Rotação	Torque (N.m)	Velocidade Angular (rad/s)	Qtd. de Movimento (N.s.m)	Ângulo (rad)
Elétrico	Voltagem (V)	Corrente (A)	Enlace de Fluxo (V.s)	Carga (C)
Hidráulico	Pressão (Pa)	Vazão Volumétrica (m ³ /s)	Qtd. de Movimento de Pressão (Pa.s)	Volume (m ³)
Termodinâmico	Temperatura (K)	Fluxo de Entropia (W/K)	-----	Entropia (J/K)
Magnético	Força Magnética (A)	Derivada do Campo (Wb/s)	-----	Densid. do Campo (Wb)
Difusão	Potencial Químico (J/mole)	Fluxo Molar (mole/s)	-----	Quantidade (mole)
Reação Química	Afinidade (J/mole)	Taxa de Reação (mole/s)	-----	Avanço (mole)

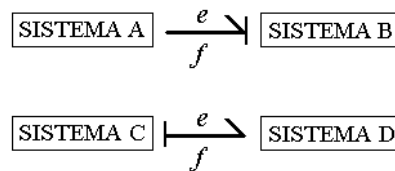


FIGURA A.1: Representação do sentido da potência e da entrada e saída de esforço e fluxo

Na Figura A.1, por exemplo, verifica-se que em ambos os casos, o sentido positivo da potência é definido como sendo da esquerda para a direita – potência fluindo de A para B, e de C para D. Porém, enquanto no primeiro caso A cede esforço e recebe fluxo de B, no segundo, C cede fluxo e recebe esforço de D.

A técnica dos grafos de ligação possui alguns elementos básicos a partir dos quais pode-se representar fisicamente um sistema dinâmico. Estes elementos são versões matemáticas idealizadas de componentes reais.

Os elementos de uma porta são aqueles em que a potência flui através de uma única ligação. As fontes ideais de esforço e fluxo (S_e e S_f) são os elementos de uma porta que

fornecem energia ilimitada ao sistema. A *inércia* (I) e o *capacitor* (C) são os responsáveis pelo armazenamento de energia, associados, respectivamente, à quantidade de movimento (p) e ao deslocamento (q). E, finalmente, o *resistor* (R) é o elemento de uma porta que dissipa energia do sistema.

Os elementos de duas portas, *transformador* (TF) e *girador* (GY), têm a função de compatibilizar as variáveis de potência, no acoplamento entre subsistemas de natureza física distinta ou não. Estes elementos são conservadores de potência, ou seja, a potência que entra é igual a que sai.

Destaca-se que quando os módulos dos *transformadores* e dos *giradores*, respectivamente m e r , não são constantes, estes elementos passam a ser chamados de *transformador modulado* (MTF) e *girador modulado* (MGY). É importante lembrar que mesmo que o módulo seja variável, estes elementos de duas portas conservam potência, da mesma forma que seus correspondentes com módulo constante (TF e GY).

Para representar as condições de equilíbrio e compatibilidade cinemática em um sistema, define-se os elementos de três ou mais portas, conhecidos por *junções*. Existem dois tipos de junção: a de esforço comum (ou *junção 0*), e a de fluxo comum (ou *junção 1*).

A Tabela A.2 apresenta os nove elementos básicos da técnica e suas atribuições de potência e causalidade²⁹.

Todos os elementos aqui apresentados foram desenvolvidos para representar sistemas de parâmetros concentrados, e consideraram apenas relações escalares para os elementos do grafo.

Entretanto, para a modelagem de sistemas representados por um número elevado de componentes, como no caso de modelos estruturais com muitos graus de liberdade, necessita-se de uma notação que ofereça uma forma mais compacta de representação. O grafo multiligação atende esta necessidade pois está associado a grandezas vetoriais e utiliza o conceito de campos multiportas. A representação gráfica de uma multiligação é mostrada na Figura A.2.

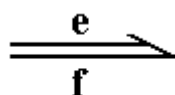


FIGURA A.2: Representação de uma multiligação

TABELA A.2: Elementos básicos da técnica dos grafos de ligação

Elemento	Representação Causal	Relação Causal
Fonte de Esforço	$Se \longrightarrow$	$e(t) = E(t)$
Fonte de Fluxo	$Sf \longleftarrow$	$f(t) = F(t)$
Resistor	$R \longleftarrow$	$e = \Phi_R(f)$
	$R \longleftarrow$	$f = \Phi_R^{-1}(e)$
Capacitor	$C \longleftarrow$	$e = \Phi_C^{-1}(\int f dt)$
	$C \longleftarrow$	$f = \frac{d}{dt} \Phi_C(e)$
Inércia	$I \longleftarrow$	$f = \Phi_I^{-1}(\int e dt)$
	$I \longleftarrow$	$e = \frac{d}{dt} \Phi_I(f)$
Transformador	$\begin{array}{c} \xrightarrow{1} \frac{m}{TF} \xrightarrow{2} \\ \xleftarrow{1} \frac{1/m}{TF} \xleftarrow{2} \end{array}$	$e_1 = m \cdot e_2$ $f_2 = m \cdot f_1$ $e_2 = e_1/m$ $f_1 = f_2/m$
	$\begin{array}{c} \xrightarrow{1} \frac{r}{GY} \xrightarrow{2} \\ \xleftarrow{1} \frac{1/r}{GY} \xleftarrow{2} \end{array}$	$e_1 = r \cdot f_2$ $e_2 = r \cdot f_1$ $f_1 = e_2/r$ $f_2 = e_1/r$
Junção 0	$\begin{array}{c} \xrightarrow{1} \mathbf{0} \xleftarrow{2} \\ \xrightarrow{3} \mathbf{0} \end{array}$	$e_2 = e_1$ $e_3 = e_1$ $f_1 + f_2 + f_3 = 0$
	$\begin{array}{c} \xrightarrow{1} \mathbf{1} \xleftarrow{2} \\ \xrightarrow{3} \mathbf{1} \end{array}$	$f_2 = f_1$ $f_3 = f_1$ $e_1 + e_2 + e_3 = 0$

A potência instantânea que flui através de uma multiligação é obtida a partir do produto escalar do vetor esforço pelo vetor fluxo.

$$P(t) = \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{f} \quad (\text{A.4})$$

Toda multiligação está associada a um parâmetro n que determina o número de elementos do vetor esforço e do vetor fluxo.

Os campos multiportas \mathbf{I} , \mathbf{C} e \mathbf{R} , são generalizações dos elementos escalares armazenadores (I e C) e dissipadores (R) de energia, expressos através de grandezas matriciais. Estas e outras estruturas multiligação são apresentadas na Tabela A.3

TABELA A.3: Elementos Multiligação

Elemento Generalizado	Representação
Fonte de Esforço	$\mathbf{S}_e \Rightarrow$
Fonte de Fluxo	$\mathbf{S}_f \Rightarrow$
Campo Resistivo	$\mathbf{R} \Leftarrow$
Campo Capacitivo	$\mathbf{C} \Leftarrow$
Campo Inercial	$\mathbf{I} \Leftarrow$
Transformador	$\Rightarrow \mathbf{TF} \Rightarrow$
Girador	$\Rightarrow \mathbf{GY} \Rightarrow$
	$\Rightarrow \mathbf{0} \Leftarrow$
Junção Vetorial de Esforço Comum	\Uparrow
	$\Rightarrow \mathbf{1} \Leftarrow$
Junção Vetorial de Fluxo Comum	\Uparrow

O modelo matemático obtido a partir da técnica dos grafos de ligação pode ser escrito na forma de um sistema de equações diferenciais de primeira ordem dado por:

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX + DU \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

onde X é o vetor de variáveis de estado, U é o vetor de variáveis de entrada, Y é o vetor de variáveis de saída e A , B , C e D são matrizes com os coeficientes representativos das propriedades físicas do sistema.

Define-se como variável de estado as quantidades de movimento (p) das inércias e os deslocamentos (q) dos capacitores.

Então, a determinação do modelo de estado (Equação A.5), dá-se através da manipulação matemática das equações constitutivas de cada elemento, e das equações oriundas das junções.

Para ilustrar o processo de obtenção do modelo de estado representativo de um sistema dinâmico, considere o grafo multiligação apresentado na Figura A.3.

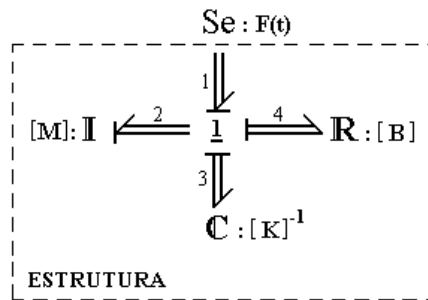


FIGURA A.3: Grafo multiligação de uma estrutura submetida a uma fonte de esforço

- Equações Constitutivas

$$\mathbf{f}_2 = [\mathbf{M}]^{-1} \mathbf{p}_2 \quad (\text{A.6})$$

$$\mathbf{e}_3 = [\mathbf{K}] \cdot \mathbf{q}_3 \quad (\text{A.7})$$

$$\mathbf{e}_4 = [\mathbf{R}] \cdot \mathbf{f}_4 \quad (\text{A.8})$$

- Equações oriundas da junção 1

$$\mathbf{f}_1 = \mathbf{f}_2 \quad (\text{A.9})$$

$$\dot{\mathbf{q}}_3 = \mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_2 \quad (\text{A.10})$$

$$\mathbf{f}_4 = \mathbf{f}_2 \quad (\text{A.11})$$

$$\dot{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4 \quad (\text{A.12})$$

Assim, substituindo as equações constitutivas nas equações oriundas da junção **1**, obtém-se:

$$\dot{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4 \quad (\text{A.12})$$

$$\dot{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{e}_1 - [\mathbf{K}] \cdot \mathbf{q}_3 - [\mathbf{R}] \cdot \mathbf{f}_4 \quad (\text{A.13})$$

$$\dot{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{e}_1 - [\mathbf{K}] \cdot \mathbf{q}_3 - [\mathbf{R}] \cdot \mathbf{f}_2 \quad (\text{A.14})$$

$$\dot{\mathbf{p}}_2 = \mathbf{e}_1 - [\mathbf{K}] \cdot \mathbf{q}_3 - [\mathbf{R}][\mathbf{M}]^{-1} \mathbf{p}_2 \quad (\text{A.15})$$

$$\dot{\mathbf{p}}_2 = -[\mathbf{R}][\mathbf{M}]^{-1} \mathbf{p}_2 - [\mathbf{K}] \cdot \mathbf{q}_3 + \mathbf{e}_1 \quad (\text{A.16})$$

$$\dot{\mathbf{q}}_3 = \mathbf{f}_3 = \mathbf{f}_2 \quad (\text{A.10})$$

$$\dot{\mathbf{q}}_3 = [\mathbf{M}]^{-1} \mathbf{p}_2 \quad (\text{A.17})$$

E, finalmente, na forma matricial do modelo de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{p}}_2 \\ \dot{\mathbf{q}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -[\mathbf{B}][\mathbf{M}]^{-1} & -[\mathbf{K}] \\ [\mathbf{M}]^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{q}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [\mathbf{I}] \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{e}_1 \quad (\text{A.18})$$

APÊNDICE B

CÓDIGO COMPUTACIONAL

Um código computacional foi desenvolvido em FORTRAN 90, para a simulação dos modelos de estado apresentados nos Capítulos 3, 4 e 5 desta dissertação. Com o objetivo de ser o mais genérico possível, este código foi implementado de forma que, tanto as propriedades da estrutura, quanto as propriedades do carregamento, pudessem ser definidas durante a fase de simulação para sistemas físicos que apresentem diferentes configurações.

Assim, a primeira etapa deste código consiste na discretização do subsistema estrutural, através do método dos elementos finitos. Esta etapa baseia-se nos procedimentos básicos do método, para a geração automática das matrizes de massa, de rigidez e de amortecimento, características da estrutura. Cabe ao usuário, apenas a escolha do tipo de elemento (viga Bernoulli-Euler, placa TCP-12 ou placa TCP-16) e do número de elementos necessários para a composição da malha, assim como a definição das propriedades da geometria e do material, e a atribuição das condições de contorno.

Destaca-se que as matrizes elementares, relativas ao modelo de viga foram desenvolvidas analiticamente, ao passo que as matrizes do modelo de placa são obtidas, a cada simulação, através de uma integração numérica de Gauss-Legendre²³. Para esta integração numérica, emprega-se uma formulação subparamétrica na qual as funções de interpolação para a aproximação da geometria do elemento são de ordem menor que as funções utilizadas para a aproximação das variáveis primárias.

Em uma segunda etapa, define-se o tipo de carregamento atuante (carga simples, oscilador ou veículo completo) e suas propriedades mecânicas. Pode-se, ainda, determinar o tipo de movimento (uniforme ou uniformemente variado) e a trajetória percorrida.

A terceira etapa deste código é responsável pela integração das equações de estado do modelo matemático. Para a solução destas equações diferenciais utiliza-se os recursos da sub-rotina DIVPAG do IMSL. Esta sub-rotina emprega método de Gear ou BDF (*Backward Differentiation Formulas*), que é apropriado para a integração de um sistema de equações rígidas, como este.

A cada passo de integração (ΔT) são definidos os módulos dos multitransformadores, responsáveis pelo posicionamento do carregamento no interior da estrutura, e são arquivadas as variáveis de estado e de saída requisitadas pelo usuário.

Todas as simulações foram executadas em computador equipado com processador Pentium II de 333 MHz, com uma memória do tipo RAM de 64 MB. Os passos de integração adotados, variaram de 10^{-4} a 10^{-7} segundos, de acordo com a velocidade do carregamento.

O tempo de processamento necessário está diretamente relacionado com o número de graus de liberdade do modelo estrutural e o tempo de simulação (T_{Final}) requisitado. Os resultados apresentados neste trabalho, consumiram em média, um tempo de processamento de vinte minutos para o modelo de viga, e quatro horas para o modelo de placa.

Apresenta-se na Figura B.1, um fluxograma simplificado, apenas para ilustrar as principais etapas do código computacional desenvolvido.

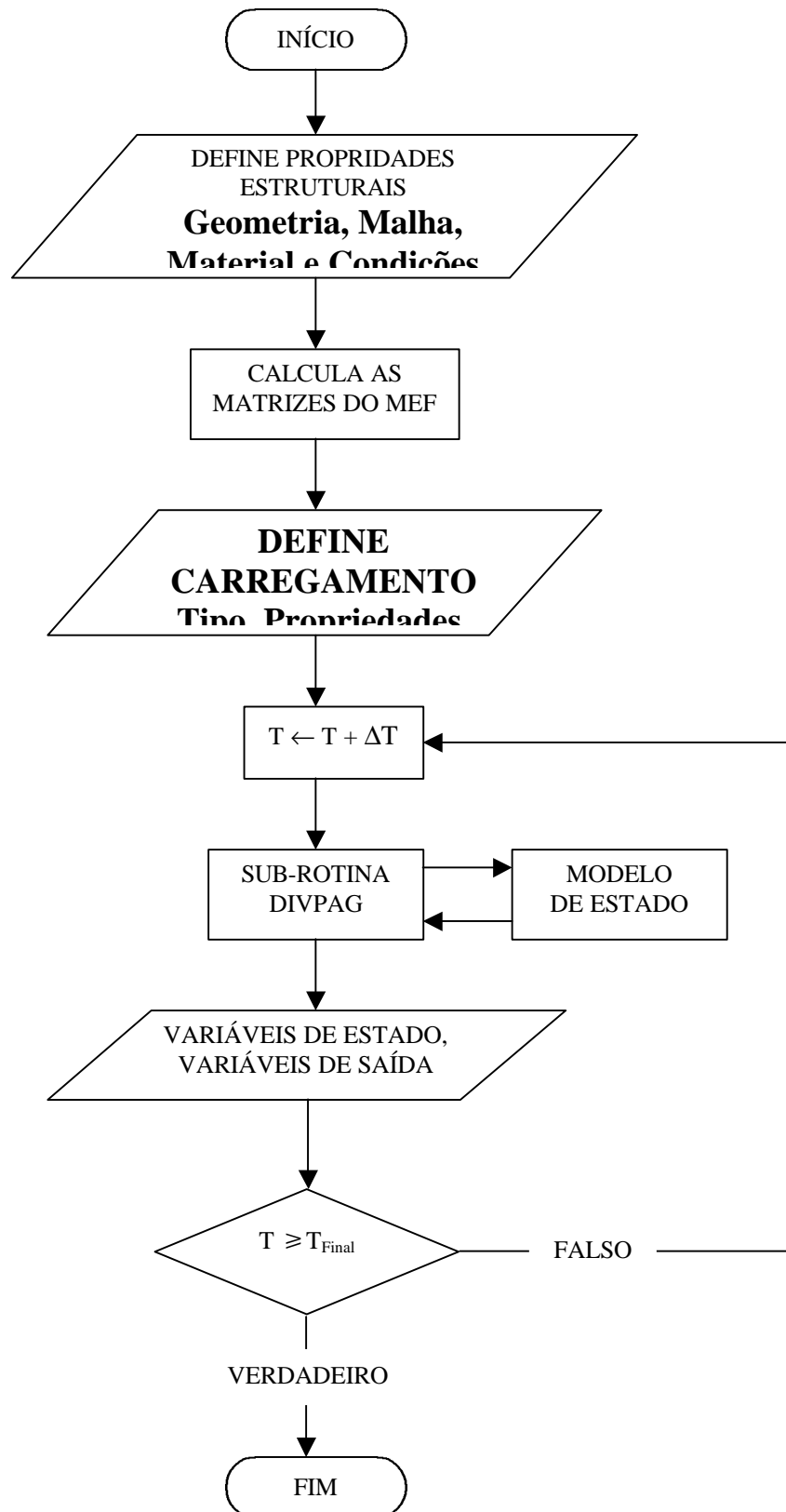


FIGURA B.1: Fluxograma

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- 1 – TIMOSHENKO, S. P., “**Theory of Structures**”, John Wiley, New York, 1965.
- 2 – BIGGS, J. M., “**Introduction to Structural Dynamics**”, McGraw Hill, New York, 1964.
- 3 – WARBURTON, G. B., “**The Dynamic Behavior of Structures**”, Pergamon Press, Oxford, 1976.
- 4 – ACHENBACH, J. D. & SUN, C. T., “Moving Load on a Flexibly Supported Timoshenko Beam”, *International Journal of Solids Structures*, **1965**, vol. 1, p. 353 – 370.
- 5 – JAHANSHAHI, A. & MONZEL, F. J., “Effects of Rotatory Inertia and Transverse Shear on the Response of Elastic Plates to Moving Loads”, *Ingenieur-Archiv*, **1965**, vol. 34, N° 6, p. 401 – 410.
- 6 – ADLER, A. A. & REISMANN, H., “Moving Loads on a Elastic Plate Strip”, *Journal of Applied Mechanics – Transactions of the ASME*, **1974**, vol. 41, p. 713 – 718.
- 7 – STEELE, C. R., “Beams and Shells with Moving Loads”, *International Journal of Solids Structures*, **1971**, vol. 7, p. 1171 – 1198.
- 8 – MARGOLIS, D. L., “Finite Mode Bond-Graph representation of Vehicle-Guideway Interaction Problems”, *Journal of The Franklin Institute*, **1976**, vol. 302, N° 1, p. 1 – 17.
- 9 – DA SILVA, F. R. & BESSA, W. M., “Cargas Móveis Sobre Placas: Uma Formulação Através da Análise Modal”, *XV COBEM*, **1999**, Águas de Lindóia.
- 10 – LIN, Y.-H. & TRETHERWEY, M. W., “Finite Element Analysis of Elastic Beams Subjected to Moving Dynamic Loads”, *Journal of Sound and Vibration*, **1990**, vol. 136, N° 2, p. 323 – 342.
- 11 – THAMBIRATNAM, D. & ZHUGE, Y., “Dynamic Analysis of Beams on Elastic Foundations Subjected to Moving Loads”, *Journal of Sound and Vibration*, **1996**, vol. 198, N° 2, p. 149 – 169.
- 12 – TAHERI, M. R. & TING, E. C., “Dynamic Response of Plates to Moving Loads: Finite Element Method”, *Computers & Structures*, **1990**, vol. 34, N° 3, p. 509 – 521.
- 13 – DA SILVA, F. R., **Procedimentos para a Análise Estrutural Dinâmica Através da Técnica Generalizada dos Grafos de Ligação**, Tese de Doutorado, COPPE, Rio de Janeiro, 1994.
- 14 – SAADEGHVAZIRI, M. A., “Finite Element Analysis of Highway Bridges Subjected to Moving Loads:”, *Computers & Structures*, **1993**, vol. 49, N° 5, p. 837 – 842.

- 15** – LEE, H. P., “Dynamic Response of a Beam with Intermediate Point Constraints Subject to Moving a Load”, *Journal of Sound and Vibration*, **1994**, vol. 171, N° 3, p. 361 – 368.
- 16** – ADAMS, G. G., “Critical Speeds and the Response of a Tensioned Beam on an Elastic Foundation to Repetitive Moving Loads ”, *International Journal of Mechanical Science*, **1995**, vol. 37, N° 7, p. 773 – 781.
- 17** – KALKER, J. J., “Discretely Supported Rails Subjected to Transient Loads:”, *Vehicle System Dynamics*, **1996**, vol. 25, p. 71 – 88.
- 18** – HENCHI, K. et alii, “Dynamic Behaviour of Multi-Span Beams Under Moving Loads”, *Journal of Sound and Vibration*, **1997**, vol. 199, N° 1, p. 33 – 50.
- 19** – HUANG, S. C. & CHIOU, W. J., “Modeling and Vibration Analysis of Spinning Disk and Moving Head Assembly in Computer Storage Systems”, *Journal of Vibration and Acoustics*, **1997**, vol. 119, p. 185 – 191.
- 20** – WU, J.-S. & SHIH, P.-Y., “Moving-Load-Induced Vibrations of a Moored Floating Bridge”, *Computers & Structures*, **1998**, vol. 66, N° 4, p. 435 – 461.
- 21** – KWON, H.-C., KIM, M.-C. & LEE, I.-W., “Vibration Control of Bridges Under Moving Loads”, *Computers & Structures*, **1998**, vol. 66, N° 4, p. 473 – 480.
- 22** – WANG, R.-T. & LIN, J.-S., “Vibration of Multi-Span Timoshenko Frames due to Moving Loads”, *Journal of Sound and Vibration*, **1998**, vol. 212, N° 3, p. 417 – 434.
- 23** – ZHENG, D. Y. et alii, “Vibration of Multi-Span Non-Uniform Beams Under Moving Loads by Using Modified Beam Vibration Functions”, *Journal of Sound and Vibration*, **1998**, vol. 212, N° 3, p. 455 – 467.
- 24** – TAKABATAKE, H., “Dynamic Analysis of Rectangular Plates with Stepped Thickness Subjected to Moving Loads Including Additional Mass”, *Journal of Sound and Vibration*, **1998**, vol. 213, N° 5, p. 829 – 842.
- 25**– WANG, R.-T. & CHOU, T.-H., “Non-Linear Vibration of Timoshenko Beam due to a Moving Force and the Weight of Beam”, *Journal of Sound and Vibration*, **1998**, vol. 218, N° 1, p. 117 – 131.
- 26** – CHAN, T. H. T. et alii, “An Interpretative Method for Moving Force Identification”, *Journal of Sound and Vibration*, **1999**, vol. 219, N° 3, p. 503 – 524.
- 27** – OLSSON, M., “Finite Element, Modal Co-ordinate Analysis of Structures Subjected to Moving Loads”, *Journal of Sound and Vibration*, **1985**, vol. 99, N° 1, p. 1 – 12.
- 28** – KARNOPP, D. C., MARGOLIS, D. L. & ROSEMBERG, R. C., “**System Dynamics: A Unified Approach**”, John Wiley, New York, 1990.

- 29 – SPERANZA NETO, M., “**Modelagem e Análise de Sistemas Dinâmicos**”, CEPUERJ, Rio de Janeiro, 1995.
- 30 – MEIROVITCH, L., “**Analytical Methods in Vibrations**”, The MacMillan Company, New York, 1997.
- 31 – REDDY, J. N., “**Introduction to the Finite Element Method**”, McGraw Hill, New York, 1993.
- 32 – BATHE, K. J., “**Finite Element Procedures in Engineering Analysis**”, Prentice Hall, New Jersey, 1982.
- 33 – TIMOSHENKO, S. P. & GERE, James E., “**Mecânica dos Sólidos**”, Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1983.
- 34 – GBADEYAN, J. A. & ONI, S. T., “Dynamic Behaviour of Beams and Rectangular Plates Under Moving Loads”, Journal of Sound and Vibration, **1995**, vol. 182, N° 5, p. 677 – 695.
- 35 – GALLAGHER, R. H., “**Finite Element Analysis: Fundamentals**”, Prentice Hall, New Jersey, 1975.
- 36 – ZIENKIEWICZ, O. C., “**The Finite Element Method**” vol 1: Linear Problems, McGraw Hill, New York, 1989.
- 37 – TIMOSHENKO, S. P., WOINOWSKY-KRIEGER, S., “**Theory of Plates and Shells**”, McGraw Hill, New York, 1959.

Dissertação apresentada por

Wallace Moreira Bessa

e aprovada pelos Srs.

Fernando Ribeiro da Silva, D.Sc.

Nelson Francisco Favilla Ebecken, D.Sc.

Mauro Speranza Neto, D.Sc.

Marcelo Amorim Savi, D.Sc.

IME, Rio de Janeiro – RJ, 14 de Março de 2000